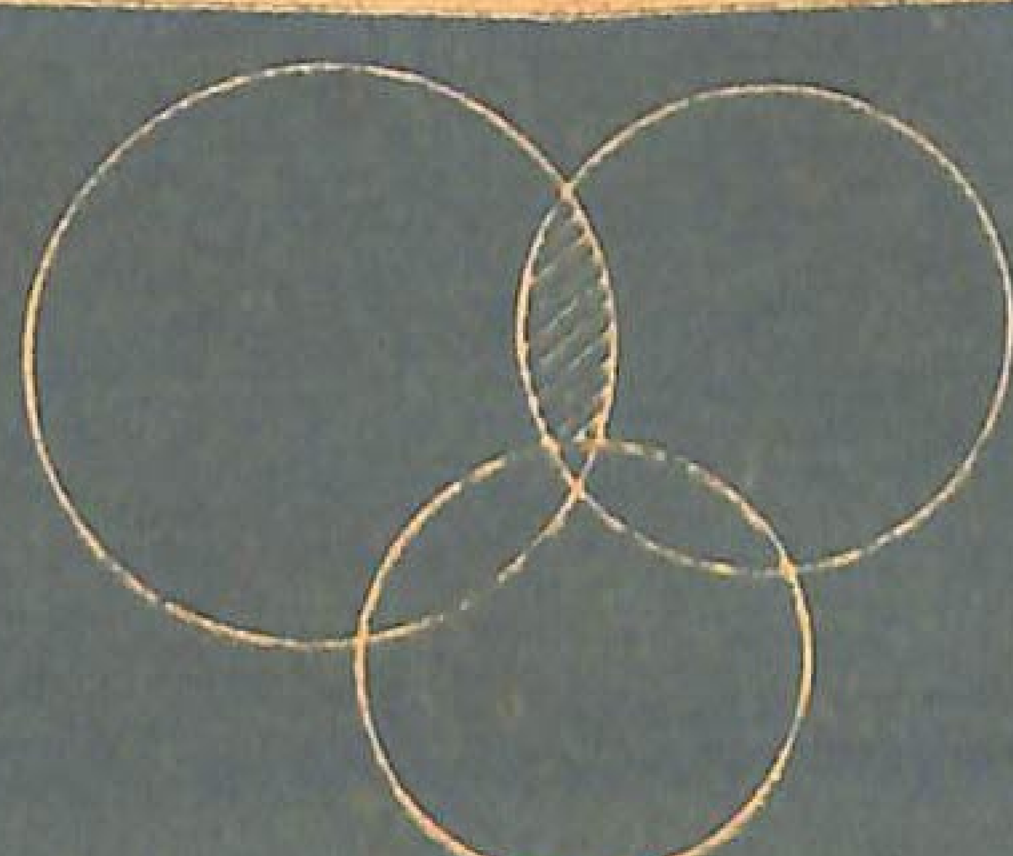
Elements of Discrete Mathematics

[In Bengali]

• KESHAB BASU •



Calcutta Book House

Written according to the New Syllabus circulated by the Board of Secondary Education, West Bengal, for **Class IX** *to be adopted by all Secondary Schools as Additional Mathematics from* **1974.**

Elements of Discrete Mathematics

[***Class IX***]

SRI KESHAB BASU, M. A.

Lecturer in Mathematics,
Central Calcutta Polytechnic.

Revised by

SRI KESHAB CHANDRA NAG,

Retired Headmaster, Mitra Institution (Bhowanipur).

CALCUTTA BOOK HOUSE

1/1, Bankim Chatterjee Street, Calcutta-12

Published by :

P. C. Bhowal
Calcutta Book House,
1/1, Bankim Chatterjee Street
Calcutta-12.

FIRST EDITION—March, 1974.

Price : Rupees Four Only.

Printed by :

Niranjan Das
Das Printers
17, Buddhu Ostagar Lane
Calcutta-9.

ভূমিকা

এই পুস্তক সম্বন্ধে বলিবার পূর্বে আমি প্রাক-প্রকাশন কয়েকটি কথা বলিবার প্রয়োজন বোধ করিতেছি। আমার পরম শ্রদ্ধেয় শিক্ষক **শ্রীযুক্ত কেশবচন্দ্র নাগ** মহাশয় তাঁহার অগাধ পাণ্ডিত্য ও সুদীর্ঘ অভিজ্ঞতার ফসল তাঁহার রচিত বিভিন্ন গণিত গ্রন্থে ছাত্রদের হাতে তুলিয়া দিয়াছেন। তাঁহার গণিত পুস্তকগুলি নিজগুণে সর্বত্র আদৃত। ১৯৭৪ সালের নূতন পাঠ্যক্রম অনুযায়ী ঐ সকল পুস্তকের পরিবর্ধন ও পরিবর্তনের সকল কাজ শেষ করিয়া হঠাৎ তিনি অসুস্থ হইয়া পড়েন। তাই পর্ষৎ কর্তৃক পরে প্রকাশিত ঐচ্ছিক গণিতের নূতন পাঠ্যক্রম অনুযায়ী পুস্তক রচনার জন্য প্রকাশক যখন তাঁহাকে অনুরোধ করেন, সেই অনুরোধ সম্পূর্ণ রক্ষা করা তাঁহার পক্ষে তখন সম্ভব হয় নাই। অতঃপর তাঁহারই নির্দেশে, পরামর্শে ও প্রত্যক্ষ তত্ত্বাবধানে এই পুস্তক রচিত হইল।

এই পুস্তকের বিষয়বস্তু বিদ্যালয়ের ছাত্রদের পক্ষে সম্পূর্ণ নূতন। পুস্তকটি যাহাতে ছাত্রদের নিকট সহজবোধ্য হয় সেজন্য যথাসাধ্য চেষ্টা করা হইয়াছে। সুধী শিক্ষকবৃন্দ এই পুস্তকের সত্বর প্রকাশনের জন্য আমার শিক্ষক মহাশয়কে (শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ) পুনঃপুনঃ অনুরোধ করায়, পুস্তকটি প্রকাশনের কাজ ত্বরান্বিত করা হইয়াছে। সে কারণ, যথাসাধ্য চেষ্টা সত্ত্বেও কয়েকটি ভুল থাকিয়া গিয়াছে। আশা রাখি, বিদগ্ধজনের গঠনমূলক সমালোচনায় পুস্তকটি পরবর্তী সংস্করণ ত্রুটিহীন ও উন্নততর আকার ধারণ করিবে। পুস্তক সম্বন্ধে একটিমাত্র দাবী করা যায় যে, আধুনিক গণিত বিশেষ করিয়া সেট্‌থিয়োরী, বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা ইত্যাদি বিষয়ে (প্রাথমিক স্তরে হইলেও) আমাদের মাতৃভাষায় এই প্রথম পুস্তক প্রকাশিত হইল।

এই পুস্তক রচনাকালে বিভিন্ন বিদেশী গ্রন্থের সাহায্য গ্রহণ করা হইয়াছে। সে কারণ ঐ সকল গ্রন্থের গ্রন্থকারদের নিকট ঋণ স্বীকার করিতেছি। বিভিন্ন উপদেশ দিয়া ডক্টর ক্ষেত্রমোহন ঘোষ (টেক্‌নিক্যাল টিচার্স ট্রেনিং ইন্‌স্টিট্যুট, কলিকাতা), ডক্টর অমিয়ভূষণ রায় (যাদবপুর বিশ্ববিদ্যালয়) ও অধ্যাপক আনন্দমোহন ঘোষ (দীনবন্ধু এণ্ড্রুজ কলেজ, গড়িয়া) আমাকে সাহায্য করিয়াছেন। শ্রদ্ধেয় শিক্ষক মহাশয়ের জ্যেষ্ঠ পুত্র শ্রীযুক্ত দেবীপ্রসাদ নাগ ও তাঁহার ভ্রাতাদের সক্রিয় সহযোগিতা ব্যতীত এই পুস্তকের সুষ্ঠু প্রকাশন সম্ভব হইত না। কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করিয়া তাঁহাদের সহিত আমার ব্যক্তিগত সম্পর্ক ক্ষুণ্ণ করিলাম না।

পরিশেষে আশা রাখি যে আমার শ্রদ্ধেয় শিক্ষক মহাশয়ের তত্ত্বাবধানে রচিত ও আশীর্বাদধন্য এই পুস্তক সুধী শিক্ষকমণ্ডলীর সমাদর লাভ করিবে।

সেণ্ট্রাল ক্যালকাটা পলিটেকনিক্ }
২৭শে মার্চ, ১৯৭৪

কেশব বসু

BOARD OF SECONDARY EDUCATION
WEST BENGAL

SYLLABUS FOR
ELEMENTS OF DISCRETE MATHEMATICS
[CLASS IX]

Algebra of Sets :

Elements and sets, Basic operations. Union, Intersection, Complement, Venn diagram, Fundamental laws of Algebra of sets ; Principle of duality ; Boolean Algebra ; Definition and properties. Disjunctive and Conjunctive forms ; Boolean functions and their simplifications.

Symbolic Logic and Algebra of Propositions :

Symbols, Propositions. Truth tables, Object logic and Syntax logic. Implication and Equivalence. Truth sets for propositions.

সূচীপত্র

বিষয় | পৃষ্ঠা

প্রযুক্ত অর্থসহ বিভিন্ন প্রতীকের তালিকা

1. $\in$: $a \in A$এর অর্থ a, A বিন্যাসটির একটি পদ।

['$\in$' একটি গ্রীক অক্ষর ; অনেক স্থলে $\in$এর পরিবর্তে 'ε' প্রতীকটি ব্যবহার করা হইয়াছে। 'ε' ছোট হরফের '$\in$' (এপসাইলন)।]

2. $\notin$: $a \notin A$এর অর্থ a, A বিন্যাসটির পদ নয়।

3. $\subset$: $A \subset B$এর অর্থ A বিন্যাসটি B বিন্যাসটির অন্তর্গত বা B বিন্যাসটির একটি উপবিন্যাস।

4. $\cup$: ইহা বিন্যাসের যোগ-এর প্রতীক্ ; $A \cup B$, A ও B বিন্যাস দুইটির যোগ বিন্যাস।

5. $\cap$: ইহা বিন্যাসের ছেদ্-এর প্রতীক ; $A \cap B$, A ও B বিন্যাস দুইটির ছেদ্ বিন্যাস।

6. $\sim$ বা ($'$) : কোন বিন্যাস বা কোন বুলিয়ান্ রাশির পূরক বা কোন বচনের নঞর্থক বচনের প্রতীক।

7. $\rightarrow$: ইহা লক্ষণা-এর প্রতীক। $p \rightarrow q$এর অর্থ p বচনের লক্ষণা q বচন।

8. $>$: ইহা 'বৃহত্তর'এর প্রতীক। $a > b$ এর অর্থ a, b অপেক্ষা বৃহত্তর।

9 $\geqslant$: ইহা 'বৃহত্তর বা সমান'-এর প্রতীক। $a \geqslant b$এর অর্থ a, b অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান।

10. $<$: ইহা 'ক্ষুদ্রতর'-এর প্রতীক। $a < b$-এর অর্থ a, b অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

11. $\leqslant$: ইহা 'ক্ষুদ্রতর বা সমান'-এর প্রতীক $a \leqslant b$এর অর্থ a, b অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা সমান।

[$\geqslant$ বা $\leqslant$ প্রতীক দুইটিকে ক্রমের প্রতীক অর্থেও ব্যবহার করা হয়।]

12. $\odot$: ইহা একটি গ্রীক অক্ষর। কোন প্রক্রিয়ার প্রতীক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

প্রথম অধ্যায়

বিন্যাস (Set)

§1. **বিন্যাস ও উপবিন্যাস (Set ও Subset) :** **বিন্যাস** বা **সেট্** (set) এবং বিন্যাসের **পদ** বা **এলিমেণ্ট** (element) শব্দ দুইটি গণিত এবং লজিকে (যুক্তিশাস্ত্রে) বহুল ব্যবহৃত এবং অত্যন্ত প্রয়োজনীয় দুইটি শব্দ। সকল অখণ্ড সংখ্যা, গ্রন্থাগারের সকল পুস্তক, একঝাঁক পাখি, একভাঁড় মিষ্টান্ন এক একটি বিন্যাসের উদাহরণ। কিন্তু বিন্যাস বলিতে কি বুঝায়? বিন্যাস কাহাকে বলে তাহা বলিবার পূর্বে জ্যামিতির দুইটি শব্দ **বিন্দু (point)** এবং **রেখা** (line)-এর কথা চিন্তা কর। তোমরা জান, যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা উচ্চতা কিছুই নাই, কিন্তু অবস্থান আছে, তাহাকে বিন্দু বলে; এবং যাহার কেবলমাত্র দৈর্ঘ্য আছে তাহাকে রেখা বলে। এইগুলিকে কিন্তু বিন্দু বা রেখার গাণিতিক সংজ্ঞা (mathematical definition) বলা যায় না। বরং এইগুলিকে সজ্ঞাত সংজ্ঞা (বা intuitive definition) বলা যায়। বিন্দু বা রেখা সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা হইতে তোমরা উপরের বক্তব্যগুলি মানিয়া লইয়াছ। বিন্দু বা রেখার ন্যায় বিন্যাসেরও কোন সঠিক গাণিতিক সংজ্ঞা দেওয়া যাইবে না। যে কোন সংখ্যক বস্তুর সমাহারকে অর্থাৎ কোন সংখ্যক বস্তুকে সমষ্টিগত ভাবে একটি **বিন্যাস** বা **set** বলে। প্রত্যেকটি বস্তুকে ঐ বিন্যাসের একটি **পদ** (**element** বা **member**) বলে। কোন বস্তু একটি বিন্যাসের একটি পদ কিনা, তাহা ঐ বস্তুর বিশেষ কোন ধর্মের (property) উপর নির্ভরশীল। পদগুলির বিশেষ কোন ধর্মই একটি বিন্যাসের নির্ধারক বলা হয়।

উদাহরণ। মনে কর J সকল অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস। (অন্য কিছু বলা না থাকিলে এই পুস্তকে J বলিতে সকল অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস বুঝিবে)। প্রত্যেক অখণ্ডসংখ্যা J-এর একটি পদ এবং কোন সংখ্যা বা বস্তু যাহা অখণ্ড সংখ্যা নয়, তাহা J-এর একটি পদ হইতে পারে না। এখানে অখণ্ডসংখ্যা হওয়াই J-এর প্রত্যেকটি পদের বিশেষ ধর্ম।

মনে কর, A সকল অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যার বিন্যাস। প্রত্যেক অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যা A-এর একটি পদ এবং কোন সংখ্যা বা বস্তু যাহা অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যা নয়, তাহা A-এর একটি পদ হইতে পারে না। 5, A-এর একটি পদ কিন্তু, 6 বা -5 A-এর একটি পদ নয়।

একটি বিশেষ বিদ্যালয়ের সকল ছাত্র সমষ্টিগত ভাবে একটি বিন্যাস। মনে কর, বিন্যাসটি S. ঐ বিদ্যালয়ের প্রত্যেক ছাত্রই বিন্যাসটির একটি পদ এবং কোন বালক যে ঐ বিদ্যালয়ের ছাত্র নয়, সে S-এর কোন পদ নয়।

এইবার একটি বিশেষ চিহ্নের সহিত তোমাদের পরিচয় করাইব। '$\in$' এই চিহ্নটি দ্বারা কোন বস্তু বা রাশি কোন বিন্যাসের পদ বুঝান হয়। যদি a কোন বিন্যাস A-এর কোন পদ হয়, তবে লেখা হয় $a \in A$. 5 সংখ্যাটি একটি অখণ্ড সংখ্যা। $\therefore$ $5 \in J$. ইহাকে 5, Jএর একটি পদ এইরূপ পড়িবে।

যদি AB ও CD সরলরেখাদ্বয় সমান হয়, তোমরা লেখ AB=CD এবং যদি উহারা অসমান হয়, তোমরা লেখ AB$\neq$CD. অর্থাৎ '**সমান**' চিহ্নটি কাটিয়া দিয়া **অসমান** বুঝান হয়। অনুরূপে কোন বস্তুর কোন বিশেষ বিন্যাসের পদ হওয়ার চিহ্ন '$\in$'কে কাটিয়া দিয়া বুঝান হয় যে, কোন বস্তু কোন বিশেষ বিন্যাসের পদ নয়। $\therefore$ b যদি A বিন্যাসের কোন পদ না হয়, $b \notin A$. যেহেতু $\frac{3}{5}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা নয়, আমরা লিখিব $\frac{3}{5} \notin J$.

1, 2, 3, 4 এই চারটি সংখ্যার সমাহার একটি বিন্যাস। মনে কর বিন্যাসটি S. $\therefore$ $1 \in S, 2 \in S, 3 \in S, 4 \in S$ এবং $5 \notin S, 7 \notin S$, কারণ 5 বা 7 S-এর পদ নয়।

সাধারণতঃ ইংরাজি বড় হরফ (capital) দ্বারা বিন্যাস চিহ্নিত করা হয় এবং পদগুলি চিহ্নিত হয় ইংরাজি ছোট হরফ (small) দ্বারা।

কোন বিন্যাসকে সাধারণতঃ দুই প্রকারে লেখা হয়। সম্ভব হইলে বিন্যাসের পদগুলিকে দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে লিখিয়া বিন্যাসটিকে বুঝান হয়। যেমন, $\{1, 2, 3, 4\}$, একটি বিন্যাস, যাহার পদগুলি 1, 2, 3 ও 4. $\{1, -1, i, -i\}$ হইতেছে 1-এর সকল চতুর্থমূলের বিন্যাস। $\{2, 4, 6, \cdots\}$ হইতেছে সকল যুগ্ম-ধনাত্মক অখণ্ডসংখ্যার বিন্যাস। কিন্তু এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক বিন্যাসকে প্রকাশ করা যায় না। দ্বিতীয় পদ্ধতিতে, কোন বস্তু তাহার যে বিশেষ ধর্মের জন্য কোন বিন্যাসের একটি পদ, তাহার দ্বারা ঐ বিন্যাসটিকে নির্দেশ করা হয়। $\{x : \text{P}\}$ হইতেছে সেই বিন্যাস যাহার প্রত্যেকটি পদের

একটি বিশেষ ধর্ম P. $\{x : x$ একটি বাস্তব সংখ্যা $\}$ হইতেছে সকল বাস্তব সংখ্যার বিন্যাস। এখানে বিন্যাসটির যে কোন পদ x-এর বিশেষ ধর্ম হইতেছে 'x একটি বাস্তব সংখ্যা'। তোমরা সহজেই বুঝিতে পারিতেছ যে, সকল বাস্তব সংখ্যার বিন্যাসকে প্রথম পদ্ধতিদ্বারা নির্দেশ করা সম্ভব নয়। আরও কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে দেওয়া হইল।

$\{x : x$ একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা $\}$; ইহা সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যার বিন্যাস।

$\{x : x$ একজন ভারতীয় $\}$; এই বিন্যাসটির প্রত্যেক পদ একজন ভারতীয় এবং অভারতীয় কোন ব্যক্তি এই বিন্যাসের কোন পদ নয়।

$\{x : x$ নবম শ্রেণীর ছাত্র $\}$, ইহা সকল নবম শ্রেণীর ছাত্রের বিন্যাস।

একটি বিন্যাস অসীম অথবা সসীম হইতে পারে। যে বিন্যাসের পদসংখ্যা অসীম তাহাকে একটি **অসীম বিন্যাস (infinite set)** বলে। সকল অখণ্ড-সংখ্যার বিন্যাস J একটি অসীম বিন্যাস ; কারণ অসীম সংখ্যক অখণ্ডসংখ্যা আছে এবং তাহারা প্রত্যেকে J-এর একটি পদ। যে বিন্যাসের পদসংখ্যা সসীম তাহাকে **সসীম বিন্যাস (finite set)** বলে। $\{1, 2, 3, 4\}$ বা $\{x : x^3 = 1\}$ সসীম বিন্যাস। প্রথম বিন্যাসটির পদসংখ্যা চার এবং দ্বিতীয়টির পদসংখ্যা তিন।

যদি একটি বিন্যাস S-এর প্রত্যেকটি পদ অপর একটি বিন্যাস A-এর একটি পদ হয়, অর্থাৎ যদি $a \in S$ হইলে $a \in A$ হয়, তবে আমরা বলি S বিন্যাসটি A বিন্যাসের একটি **উপবিন্যাস (subset)** এবং $S \subset A$ (S বিন্যাসটি A-বিন্যাসের অন্তর্গত)। সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাসটি সকল অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাসের একটি উপবিন্যাস। কারণ, প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা একটি অখণ্ডসংখ্যা এবং সকল অখণ্ডসংখ্যার বিন্যাসের একটি পদ। উপবিন্যাসের সংজ্ঞা হইতে পাই, যেকোন বিন্যাস A-এর ক্ষেত্রে $A \subset A$ অর্থাৎ প্রত্যেক বিন্যাস নিজের একটি উপবিন্যাস। যদি কোন বিন্যাস B অপর একটি বিন্যাস A-এর একটি উপবিন্যাস হয় এবং A বিন্যাসটির অন্ততঃ একটি পদ a থাকে যে, a, B বিন্যাসের কোন পদ নয় অর্থাৎ অন্ততঃ একটি a যদি পাওয়া যায় যে $a \in A$ কিন্তু, $a \notin B$, তবে Bকে A বিন্যাসের একটি **যথার্থ উপবিন্যাস (proper subset)** বলা হয়।

সংজ্ঞা। দুইটি বিন্যাস A ও B যদি এইরূপ হয় যে, A-এর প্রত্যেকটি পদ B-এর একটি পদ এবং B-এর প্রত্যেকটি পদ A-এর একটি পদ, অর্থাৎ

যদি $a \in A$ হয়, তবে $a \in B$.

এবং যদি $b \in B$ হয়, $b \in A$, তবে A ও B বিন্যাস দুইটিকে অভিন্ন বা সমান বলা হয় এবং লেখা হয় $A = B$.

উপরের সংজ্ঞাটিকে **Axiom of Extent** (বা ব্যাপ্তি বিষয়ক স্বতঃসিদ্ধ) বলা হয়।

উপপাদ্য 1. যদি A ও B দুইটি বিন্যাস এইরূপ হয় যে, $A \subset B$ এবং $B \subset A$, তবে $A = B$.

প্রমাণ। মনে কর, $a \in A$; যেহেতু $A \subset B$, $\therefore$ $a \in B$

আবার যদি $b \in B$ হয়, যেহেতু $B \subset A$ $\therefore$ $b \in A$

অর্থাৎ, A ও B বিন্যাস দুইটি এইরূপ যে A-এর প্রত্যেকটি পদ B-এর একটি পদ এবং B-এর প্রত্যেকটি পদ A-এর একটি পদ।

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে $A = B$.

উপপাদ্য 2. যদি তিনটি বিন্যাস A, B ও C এইরূপ হয় যে, $A \subset B$ এবং $B \subset C$, তবে $A \subset C$.

প্রমাণ। মনে কর, $a \in A$. যেহেতু $A \subset B$, $\therefore$ $a \in B$. আবার $B \subset C$ $\therefore$ $a \in C$.

সুতরাং $a \in A$ হইলে $a \in C$ এবং ইহা A বিন্যাসটির প্রত্যেক পদের জন্যই সত্য। অতএব, A বিন্যাসটির প্রত্যেক পদ C বিন্যাসটির একটি পদ। সুতরাং $A \subset C$.

রাসেলের কূট (Russel's Paradox) : অনেক সময় একটি বিন্যাস অপর একটি বিন্যাসের একটি পদ হয়। $\{0, \{1, 2, 3, 4\}, 5, 7\}$ বিন্যাসটির একটি পদ $\{1, 2, 3, 4\}$ বিন্যাসটি। সুতরাং কোন বিন্যাস সেই বিন্যাসের একটি পদ হইতে পারে। যদি কোন বিন্যাস S, S-এর কোন পদ না হয়, তবে Sকে একটি **স্বাভাবিক বিন্যাস (Normal Set)** বলে। যদি কোন বিন্যাস S', S'-এর কোন পদ হয়, তবে S'কে একটি **অস্বাভাবিক বিন্যাস (Abnormal Set)** বলে।

মনে কর, সকল স্বাভাবিক বিন্যাসগুলির বিন্যাস **N.** এখন দুইটি সম্ভাবনা থাকে। হয়, N একটি স্বাভাবিক বিন্যাস নতুবা N একটি অস্বাভাবিক বিন্যাস। N যদি স্বাভাবিক বিন্যাস হয়, তবে N স্বাভাবিক বিন্যাসগুলির বিন্যাস N-এর একটি পদ। $\therefore$ $N \in N$; সুতরাং N একটি অস্বাভাবিক

বিন্যাস। সুতরাং প্রথম সম্ভাবনায় N একই সঙ্গে স্বাভাবিক ও অস্বাভাবিক বিন্যাস, যাহা অসম্ভব। এইবার দ্বিতীয় সম্ভাবনা অনুযায়ী মনে কর N একটি অস্বাভাবিক বিন্যাস। $\therefore$ N, স্বাভাবিক বিন্যাসগুলির বিন্যাসের একটি পদ নয়, অর্থাৎ $N \not\in N$. সুতরাং N একটি স্বাভাবিক বিন্যাস। $\therefore$ N একই সঙ্গে একটি স্বাভাবিক ও অস্বাভাবিক বিন্যাস। যাহা অসম্ভব। সুতরাং উভয় সম্ভাবনাতেই একটি অসম্ভব পরিস্থিতির উদ্ভব হইতেছে।

রাসেলের কূটে যে অসম্ভব পরিস্থিতির উদ্ভব হইয়াছে, তাহা দূর করার জন্য একাধিক বিন্যাস সম্পর্কিত আলোচনায় প্রত্যেক বিন্যাসকে একটি বিশেষ বিন্যাস U-এর উপবিন্যাস রূপে কল্পনা করা হয়। Uকে বলা হয় একটি **সার্বিক বিন্যাস (Universal set).**

এখন দেখা যাক, একটি সার্বিক বিন্যাসের অস্তিত্ব দ্বারা রাসেলের কূটের অসম্ভব পরিস্থিতি দূর হয় কিনা। এইবার মনে কর U-এর সকল স্বাভাবিক উপবিন্যাসের বিন্যাস N. $\therefore$ $N \not\in N$, কারণ N, U-এর কোন উপবিন্যাস নয়। $\therefore$ N একটি স্বাভাবিক বিন্যাস এবং অপর কোন সম্ভাবনা নাই।

শূন্য বিন্যাস (Empty set বা Null set): মনে কর $\{x : x=1$ এবং $x=2\}$ U-এর একটি উপবিন্যাস। তোমরা জান এমন কোন বস্তু বা রাশি নাই যাহা একই সঙ্গে 1 এবং 2-এর সহিত সমান। সুতরাং বিন্যাসটির কোন পদ নাই। যে বিন্যাসে কোন পদ থাকে না, তাহাকে শূন্যবিন্যাস বলে। সাধারণতঃ ϕ এই গ্রীক অক্ষরদ্বারা শূন্য বিন্যাসকে চিহ্নিত করা হয়। $\phi=\{x : x \neq x\}$ একটি শূন্য বিন্যাস।

উপপাদ্য 3. একাধিক শূন্য বিন্যাস থাকিতে পারে না।

প্রমাণ। মনে কর ϕ_1 ও ϕ_2 দুইটি শূন্য বিন্যাস।

যেহেতু ϕ_1 শূন্যবিন্যাস, ϕ_1-এর এমন কোন পদ নাই যাহা ϕ_2এর পদ নয়। $\therefore$ $\phi_1 \subset \phi_2$. অনুরূপে $\phi_2 \subset \phi_1$.

$\therefore$ $\phi_1 = \phi_2$ অর্থাৎ একাধিক শূন্যবিন্যাস থাকিতে পারে না।

উপপাদ্য 4. ϕ প্রত্যেক বিন্যাসের উপবিন্যাস।

প্রমাণ। মনে কর A যে-কোন একটি বিন্যাস। যেহেতু ϕ শূন্যবিন্যাস, ϕ-এর কোন পদ নাই। সুতরাং এমন কোন $a \in \phi$ নাই যে $a \not\in A$. $\therefore$ $\phi \subset A$.

অর্থাৎ ϕ, A-এর একটি উপবিন্যাস।

এক পদবিশিষ্ট উপবিন্যাস (Set containing only one element)।
$\{x : x=a\}$ বিন্যাসটিতে একটি মাত্র পদ আছে।

$\therefore$ $\{x : x=a\}=\{a\}$. মনে রাখিবে $\{5\}\neq 5$; $\phi\neq\{\phi\}$. দেখ, $\phi\in\{\phi\}$; কিন্তু, $\phi\not\in\phi$, কারণ ϕ-এর কোন পদ নাই।

উদাহরণমালা 1

1. নিম্নের কোন্‌গুলি বিন্যাস বল :

(a) প্রথম পাঁচটি ধনাত্মক অখণ্ড যুগ্মসংখ্যা ;

(b) 1 হইতে 30 পর্যন্ত সকল ধনাত্মক অখণ্ড অযুগ্মসংখ্যা ;

(c) পৃথিবীর সকল দীর্ঘ নদী ;

(d) সকল সামান্য ভগ্নাংশ।

উত্তর : (a) প্রথম পাঁচটি অখণ্ড যুগ্মসংখ্যা একটি বিন্যাস। কারণ, কোন ঐ বিন্যাসের পদ কি পদ নয়, বলা সম্ভব। 2, 4, 6, 8 ও 10 এই পাঁচটি বস্তু সংখ্যা ঐ বিন্যাসের পদ এবং ঐ সংখ্যাগুলি ব্যতীত অন্য কোন বস্তু ঐ বিন্যাসের পদ নয়।

(b) 1 হইতে 30 পর্যন্ত সকল অখণ্ড অযুগ্মসংখ্যা একটি বিন্যাস। কারণ কোন বস্তু, ঐ বিন্যাসের পদ কি পদ নয়, বলা সম্ভব।

(c) পৃথিবীর সকল দীর্ঘ নদী একটি বিন্যাস নয়। কারণ কোন্ নদীগুলি দীর্ঘ এবং কোন্‌গুলি দীর্ঘ নয় তাহা ঠিক করা সম্ভব নয়। সুতরাং কোন্ নদী ঐ বিন্যাসের একটি পদ এবং কোন্ নদী ঐ বিন্যাসের একটি পদ নয় তাহা সঠিক ভাবে বলা সম্ভব নয়।

(d) সকল সামান্য ভগ্নাংশ একটি বিন্যাস। কারণ এক্ষেত্রে বলা সম্ভব কোন্ বস্তু ঐ বিন্যাসের পদ এবং কোন্ বস্তু ঐ বিন্যাসের পদ নয়।

2. নীচের সংখ্যাগুলির কোন্‌গুলি সকল অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যার বিন্যাসের পদ বল :

(a) 110 ; (b) 971 ; (c) 1011 ; (d) 2458 ; (e) $\frac{5}{6}$.

উঃ (a) 110 অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যা নয়। সুতরাং 110 বিন্যাসটির পদ নয়।

(b) 971 একটি অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং 971 বিন্যাসটির পদ।

(c) 1011 একটি অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং 1011 বিন্যাসটির পদ।

(d) 2458 অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যা নয়। সুতরাং 2458 বিন্যাসটির পদ নয়।

(e) $\frac{5}{6}$ অখণ্ড সংখ্যা নয়। অতএব $\frac{5}{6}$ বিন্যাসটির পদ নয়।

3. নিম্নের কোন্‌গুলি সকল অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যার বিন্যাসের পদ :

(a) 13 ; (b) 6 ; (c) 19 ; (d) 15 ; (e) 2.

উঃ (a) 13 একটি অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা। অতএব 13 বিন্যাসটির একটি পদ।

(b) 6 একটি মৌলিক সংখ্যা নয়। সুতরাং 6 বিন্যাসটির পদ নয়।

(c) 19 একটি অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা ; অতএব 19 বিন্যাসটির একটি পদ।

(d) 15 মৌলিক সংখ্যা নয়। সুতরাং 15 বিন্যাসটির পদ নয়।

(e) 2 একটি যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা। সুতরাং 2 বিন্যাসটির পদ নয়।

4. নিম্নের বিন্যাসগুলির যথাযোগ্য বিবরণ দাও :

(a) $\{b, c, d\}$ (b) {January June, July}.

উ; (a) b, c, d অক্ষর তিনটি, প্রথম তিনটি ইংরাজি ব্যঞ্জনবর্ণ। সুতরাং প্রদত্ত বিন্যাসটিকে প্রথম তিনটি ব্যঞ্জনবর্ণের বিন্যাস বলা যাইবে।

(b) প্রদত্ত তিনটি মাসের আদ্যাক্ষর J. এবং আর কোন ইংরাজি মাসের আদ্যাক্ষর J নয়। সুতরাং প্রদত্ত বিন্যাসটিকে J আদ্যাক্ষরবিশিষ্ট ইংরাজি মাসগুলির বিন্যাস বলা যাইবে।

5. {1 2, 1} বিন্যাসটিতে কয়টি পদ আছে ?

উঃ {1, 2, 1} বিন্যাসটির পদসংখ্যা দুই। কারণ ইহার পদ দুইটি 1 এবং 2.

6. 'HIPPOPOTAMUS' শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাসটির কয়টি পদ ? পদগুলি কি কি ?

উঃ দেখ, প্রদত্ত শব্দটিতে 12টি অক্ষর আছে, ইহাদের মধ্যে তিনটি P, দুইটি O, এবং একটি করিয়া H, I, T, A, M, U এবং S আছে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাসটির পদসংখ্যা 8. পদগুলি P, O, H, I, T, A, M, U এবং S অর্থাৎ বিন্যাসটি {P, O, H, I, T, A, M, U, S}.

7. মনে কর $J^+=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ এবং $N=\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

(a) J^+-এর সকল পদ কি N-এর পদ ?

(b) N-এর সকল পদ কি J^+-এর পদ ?

উ: (a) J^+-এর সকল পদ N-এর পদ কারণ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা J^+-এর পদ এবং শূন্য ও সকল স্বাভাবিক সংখ্যা N-এর পদ।

(b) N-এর সকল পদ J^+-এর পদ নয়। 0, N-এর পদ কিন্তু J^+-এর পদ নয়।

8. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি সসীম এবং কোন্‌গুলি অসীম :

(a) $\{1, 2, 3, 4\}$ (b) সকল স্বাভাবিক সংখ্যার বিন্যাস।

(c) $\{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $1 \leqslant x \leqslant 30\}$

(d) $\{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $x > 30\}$

(e) $\{x : 0 \leqslant x \leqslant 1$ এবং x একটি ভগ্নাংশ$\}$

(f) সকল যুগ্ম মৌলিক সংখ্যার বিন্যাস।

উ: (a) বিন্যাসটি সসীম। কারণ ইহার পদ সংখ্যা 4.

(b) বিন্যাসটি অসীম। কারণ অসীম সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার প্রত্যেকটি বিন্যাসটির পদ।

(c) বিন্যাসটি সসীম। কারণ 1এর সমান অথবা বৃহত্তর এবং 30এর সমান বা ক্ষুদ্রতর, এই প্রকার 30টি স্বাভাবিক সংখ্যা আছে।

(d) বিন্যাসটি অসীম। কারণ 30 হইতে বৃহত্তর অসীম সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা আছে এবং উহাদের প্রত্যেকটি বিন্যাসটির পদ।

(e) বিন্যাসটি অসীম। কারণ 0 এবং 1এর মধ্যে অসীম সংখ্যক ভগ্নাংশ আছে।

(f) বিন্যাসটি সসীম। কারণ 2 ভিন্ন অন্য কোন যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা নাই। সুতরাং বিন্যাসটির পদ সংখ্যা 1 এবং বিন্যাসটি $\{2\}$ বিন্যাসটির সহিত সমান।

9. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌টি, অপরটির উপবিন্যাস বল :

(a) $A=\{3, 4, 5, 7\}$; $B=\{3, 4, 5, 7, 10\}$

(b) $C=\{b, c, p, q\}$; $D=\{b, p, g\}$

(c) $E=\{i, r, u, x\}$; $F=\{i, u, r, u, v, x,\}$

উ: (a) A, Bএর উপবিন্যাস। কারণ Aএর প্রত্যেকটি পদ, Bএর একটি পদ।

(b) D, Cএর উপবিন্যাস। কারণ Dএর প্রত্যেকটি পদ Cএর একটি পদ।

(*c*) E, Fএর একটি উপবিন্যাস। কারণ, Eএর প্রত্যেকটি পদ Fএর একটি পদ।

10. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌টি অপরটির উপবিন্যাস বল :

(*a*) পশ্চিমবঙ্গের সকল অধিবাসী ; ভারতের সকল অধিবাসী।

(*b*) সকল অখণ্ড অযুগ্ম সংখ্যার বিন্যাস ; সকল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস।

(*c*) $\{a, b, c, d, e\}$; $\{b, c, d, e, f\}$.

উঃ (*a*) পশ্চিমবঙ্গের সকল অধিবাসী ভারতেরও অধিবাসী। সুতরাং প্রথম বিন্যাসটি দ্বিতীয়টির উপবিন্যাস।

(*b*) বিন্যাস দুইটির মধ্যে পারস্পরিক উপবিন্যাস সম্পর্ক নাই। কারণ, প্রথম বিন্যাসটির কোন পদ দ্বিতীয়টির পদ নয়। আবার দ্বিতীয়টির কোন পদ প্রথমটির পদ নয়।

(*c*) বিন্যাস দুইটির মধ্যে পারস্পরিক উপবিন্যাস সম্পর্ক নাই। কারণ, প্রথম বিন্যাসটির পদ '*a*' দ্বিতীয় বিন্যাসটির পদ নয় এবং দ্বিতীয়টির '*f*' প্রথমটির পদ নয়।

11. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি শূন্য বিন্যাস :

(*a*) A : $4\frac{1}{2}$ হইতে $4\frac{2}{3}$এর মধ্যে সকল অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস।

(*b*) B : 3 এবং 5এর মধ্যে সকল অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যার বিন্যাস।

(*c*) C : যে সকল অখণ্ড সংখ্যা যুগ্ম এবং অযুগ্ম তাহাদের বিন্যাস।

উঃ (*a*) $4\frac{1}{2}$ হইতে $4\frac{2}{3}$এর মধ্যে কোন অখণ্ড সংখ্যা নাই। সুতরাং A শূন্য বিন্যাস।

(*b*) 4, 3 এবং 5এর মধ্যস্থ একটি যুগ্ম সংখ্যা। $\therefore$ $4 \in B$ এবং B শূন্য বিন্যাস নয়।

(*c*) কোন সংখ্যা একই সঙ্গে যুগ্ম এবং অযুগ্ম সংখ্যা হইতে পারে না। সুতরাং C-এর কোন পদ নাই এবং C শূন্য বিন্যাস।

12. কোন্‌টি শুদ্ধ এবং কোন্‌টি অশুদ্ধ এবং কেন :

(*i*) $5 \in \{5, 6\}$; (*ii*) $\{5\} \in \{5, 6\}$; (*iii*) $\{5\} \subset \{5, 6\}$; (*iv*) $a \in, \{a\}$; (*v*) $a \in, \{a, \{a\}\}$; (*vi*) $a \subset \{a, \{a\}\}$; (*vii*) $\{a\} \in \{a, \{a\}$; (*viii*) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$.

উঃ (*i*) $5 \in \{5, 6\}$ শুদ্ধ। $\{5, 6\}$ একটি বিন্যাস যাহার দুইটি মাত্র পদ 5 ও 6 $\therefore$ $5 \in \{5, 6\}$.

(*ii*) $\{5\} \in \{5, 6\}$ অশুদ্ধ। $\{5\}$ একটি বিন্যাস যাহার একটিমাত্র পদ 5 এবং $\{5, 6\}$ একটি বিন্যাস যাহার পদ 5 ও 6 এবং যেহেতু $5 \neq \{5\}$, $\{5\} \notin \{5, 6\}$.

(*iii*) $\{5\} \subseteq \{5, 6\}$ শুদ্ধ; কারণ $\{5\}$ বিন্যাসের একটি মাত্র পদ 5, $\{5, 6\}$ বিন্যাসেরও পদ।

(*iv*) $a \in \{a\}$ শুদ্ধ। কারণ, $\{a\}$ একটি পদবিশিষ্ট বিন্যাস এবং ঐ একটি মাত্র পদ a.

(*v*) $a \in \{a, \{a\}\}$ শুদ্ধ। কারণ, $\{a, \{a\}\}$ বিন্যাসটির একটি পদ a.

(*vi*) $a \subset \{a, \{a, \{a\}\}$ অশুদ্ধ। কারণ একটি বিন্যাসের উপবিন্যাস একটি বিন্যাস কিন্তু a একটি বিন্যাস নয়।

(*vii*) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ শুদ্ধ। কারণ, $\{a, \{a\}\}$ বিন্যাসের একটি পদ $\{a\}$;

(*viii*) $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$ শুদ্ধ। কারণ $\{a\}$ বিন্যাসের একটি মাত্র পদ a, $\{a, \{a\}\}$ বিন্যাসের একটি পদ।

13. দেখাও, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

উঃ মনে কর $A = \{1, 2\}$; $B = \{2, 1\}$

Aএর দুইটি পদ 1, 2, Bএরও পদ। $\therefore \quad A \subseteq B$

অনুরূপে $B \subseteq A \quad \therefore \quad A = B$.

14. নীচের বিন্যাস দুইটির সকল উপবিন্যাসগুলি নির্ণয় কর :

(*a*) $\{1, 2, 3\}$; (*b*) $\{1\}$;

উঃ (*a*) $\{1, 2, 3\}$ এর উপবিন্যাস সংখ্যা 8.

(*i*) $\{1, 2, 3\}$; (*ii*) $\{2, 3\}$; (*iii*) $\{3, 1\}$; (*iv*) $\{1, 2\}$; (*v*) $\{1\}$; (*vi*) $\{2\}$; (*vii*) $\{3\}$ ও (*viii*) ϕ.

(*b*) $\{1\}$ এর দুইটি উপবিন্যাস। (*i*) $\{1\}$ এবং (*ii*) ϕ ;

15. A, B ও C তিনটি বিন্যাস এবং $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ এবং $C \subseteq A$. দেখাও $A = B = C$.

উঃ যেহেতু, $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C \quad \therefore \quad A \subseteq C$ (উপপাদ্য 2).

আবার যেহেতু $C \subseteq A, \quad \therefore \quad A = C$ (উপপাদ্য 1).

যেহেতু $C \subseteq A$ এবং $A \subseteq B \quad \therefore \quad C \subseteq B$ (উপপাদ্য 2).

আবার যেহেতু $B \subseteq C, \quad \therefore \quad B = C$ (উপপাদ্য 1)

সুতরাং $A = B = C$.

16. x, y, z তিনটি বিন্যাস। যদি $\{x, y\}=\{x, z\}$ হয়, প্রমাণ কর $y=z$.

$\{x, y\}$ ও $\{x, z\}$ বিন্যাস দুইটির প্রত্যেকেই দুই পদবিশিষ্ট।

যেহেতু $\{x, y\}=\{x, z\}$, প্রত্যেক বিন্যাসের পদগুলি অন্যটির পদ। x উভয়ের সাধারণ পদ। $\therefore$ অপর দুইটি পদ y ও z পরস্পর সমান। $\therefore y=z$.

17. A ও B যে কোন দুইটি বিন্যাস। $A \in B$ হইলে $B \notin A$. এই সত্য হইতে প্রমাণ কর যে যদি p, q, r, s চারটি বিন্যাস হয় এবং $\{p, \{p, q\}\}=\{r, \{r, s\}\}$, তবে $p=r$ এবং $q=s$.

যেহেতু $\{p, \{p, q\}\}=\{r, \{r, s\}\}$

অতএব $p=r$ এবং $\{p, q\}=\{r, s\}$...(1)

নতুবা $p=\{r, s\}$ এবং $\{p, q\}=r$···(2)

প্রথমে মনে কর (2) সত্য।

$\therefore \quad p=\{r, s\} \quad \therefore \quad r \in p \quad \therefore \quad p \notin r$.

আবার $\because \quad r=\{p, q\} \quad \therefore \quad p \in r$;

$\therefore \quad p \notin r$ এবং $p \in r$ যাহা অসম্ভব।

$\therefore$ (2) সত্য নয় অতএব (1) সত্য।

$\therefore \quad p=r$ এবং $\{p, q\}=\{r, s\} \quad \therefore \quad q=s$.

সুতরাং $p=r$ এবং $q=s$.

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নের কোন্‌গুলি বিন্যাস বল:

(a) শেষ দশটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

(b) $\{x : 5 \leqslant x \leqslant 50$ এবং x একটি অখণ্ড যুগ্ম সংখ্যা $\}$.

(c) তোমার শ্রেণীর সকল ছাত্র-ছাত্রী।

(d) তোমার শ্রেণীর সকল বুদ্ধিমান ছাত্র-ছাত্রী।

(e) তোমার শ্রেণীর সকল খর্বকায় ছাত্র।

2. $\{1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 3, 5\}$ বিন্যাসটির পদ সংখ্যা কত?

3. একটি সঙ্ঘের সদস্য সংখ্যা পনের। সদস্যদের নাম সঙ্ঘের দপ্তরে তালিকা ভুক্ত করা হইয়াছে। কোন ব্যক্তি ঐ সঙ্ঘের সভ্য কিনা, তুমি কিভাবে নির্ণয় করিবে?

4. নীচের সংখ্যাগুলির কোন্‌গুলি সকল অখণ্ড যুগ্মসংখ্যার বিন্যাসের পদ :
(*a*) 1, (*b*) 112 (*c*) 37, (*d*) 38, (*e*) $\frac{1}{2}$, (*f*) $\frac{1}{3}$, (*g*) 932.

5. নীচের সংখ্যাগুলির কোন্‌গুলি সকল যুগ্ম মৌলিক সংখ্যার বিন্যাসের পদ :
(*a*) 0 ; (*b*) 1 ; (*c*) 2 ; (*d*) 3 ; (*e*) 4 ; (*f*) 5.

6. নিম্নের বিন্যাসগুলির যথাযোগ্য বিবরণ দাও :
(*a*) $\{a, e, i, o, u\}$, (*b*) $\{x, y, z\}$, (*c*) $\{3, 5, 7, 11, 13\}$.
(*d*) {Ashar, Asvin, Agrahayana}.

7, 'AMERICA' শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাসের পদ সংখ্যা কত ?

8. 77, {6, 11, 16, 21, 26,...} বিন্যাসটির কোন পদ কিনা বল।

9. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি শূন্য বিন্যাস :
(*a*) $\{x : 5 \leqslant x \leqslant 10$ এবং x একটি ঋণাত্মক সংখ্যা$\}$.
(*b*) $\{x : x$ একটি যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা এবং $x > 2\}$.
(*c*) $\{x : 10 \leqslant x \leqslant 50\}$.
(*d*) $\{x : 30 < x < 30\frac{1}{2}$ এবং x একটি অখণ্ড সংখ্যা$\}$.

10. মনে কর, $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$.
এবং $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
A বিন্যাসটির প্রত্যেক পদ কি B বিন্যাসের একটি পদ ?

11. মনে কর $A = \{1, 1, 2, 3, 2, 4, 3, 5, 4\}$.
এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 4, 5, 3\}$
দেখাও $A \subset B$ এবং $B \subseteq A$.
ইহা হইতে বিন্যাস দুইটি সম্পর্কে কি সিদ্ধান্তে আসিতে পার ?

12. মনে কর J সকল অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস এবং J^+ সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস। দেখাও J^+, J-এর একটি উপবিন্যাস।

13. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌টি অপরটির উপবিন্যাস :
(*a*) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$
(*b*) $C = \{a, b, c, d\}$; $D = \{a, b, b, c, a, c, a\}$.

14. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি সসীম এবং কোন্‌গুলি অসীম :
(*a*) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (*b*) $B = \{x : x$, 7-এর একটি গুণিতক$\}$
(*c*) $C = \{x : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $x < 30\}$.

(*d*) D=$\{x : x$ একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $x<30\}$.

(*e*) $E=\{x : 5\leqslant x\leqslant 7\}$.

15. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি অপরটির উপবিন্যাস :

(*i*) (*a*) A=পশ্চিমবঙ্গের সকল অধিবাসী (*b*) B=পশ্চিমবঙ্গের সকল বিধান সভার সদস্য। (*ii*) (*a*) A=পশ্চিমবঙ্গের সকল অধিবাসী ; (*b*) ভারতের সকল লোকসভার সদস্য। (*iii*) $A=\{a, e\ i, o, u\}$; $B=\{a, b, c, d, e\}$.

16. কোন্‌টি শুদ্ধ এবং কোন্‌টি অশুদ্ধ এবং কেন :

(*i*) $\{1\}\subset\{1, 2\}$ (*ii*) $\{a, b\}\in\{a, b, a, b\}$ (*iii*) $\{a,b\}\subset\{a,b, a,b\}$. (*iv*) $\{1, 2\}\neq\{2, 1\}$ (*v*) $\{\{2\}\}=\{2, \{2\}\}$.

17. প্রদত্ত বিন্যাসগুলির সকল উপবিন্যাসগুলি নির্ণয় কর :

(*i*) $\{1, 2\}$; (*ii*) $\{\{\phi\}\}$ (*iii*) $\{\{\phi\}, \{\phi\}\}$.

18. নিম্নের বিন্যাসগুলিকে $\{x : P\}$ আকারে লিখ :

(*i*) সকল ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার বিন্যাস।

(*ii*) সকল ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস।

(*iii*) 1এর সকল ঘনমূলের বিন্যাস।

19. $\{\phi\}$, $\{\{\phi\}\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$ বিন্যাস তিনটির প্রত্যেক বিন্যাস অপর একটি বিন্যাসের সহিত $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ এই চারটি সম্পর্কের একটি দ্বারা যুক্ত। বিন্যাস তিনটির এইরূপ সম্ভাব্য সকল সম্পর্কগুলি নির্ণয় কর।

20. a, b, c, d ও e পাঁচটি বালক। উহাদের যে কোন দুইজনকে একসঙ্গে একটি বিন্যাস কল্পনা করা যায়। যেমন, (a, b). উহাদের প্রত্যেকে অবশিষ্ট চারজনের দুইজনের সহিত পরিচিত এবং অপর দুইজনের সহিত অপরিচিত। যদি S পরস্পর পরিচিত দুইব্যক্তির বিন্যাসগুলির বিন্যাস হয়, এবং S′ পরস্পর অপরিচিত দুইব্যক্তির বিন্যাসগুলির বিন্যাস হয়, তবে S বিন্যাসটির একটি উদাহরণ দাও।

§ 2. **দ্বিপদ-প্রক্রিয়া (Binary Composition)** : তোমরা অখণ্ড সংখ্যা বা ভগ্নাংশ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ শিখিয়াছ। ইহাদের **দ্বিপদ প্রক্রিয়া** বলা হয়। দ্বিপদ শব্দটি ব্যবহার করা হয় কারণ প্রত্যেক প্রক্রিয়ায় দুইটি করিয়া সংখ্যা বা রাশি লওয়া হয়। কোন অখণ্ড

সংখ্যা বা ভগ্নাংশ সংখ্যা সকল অখণ্ড সংখ্যা বা সকল ভগ্নাংশ সংখ্যার বিন্যাসের পদ। ঐ প্রক্রিয়াগুলিকে **পাটীগাণিতিক প্রক্রিয়া (Arithmetical Composition)** বলা হয়। উপরের বিন্যাসগুলি ব্যতীত অন্যান্য অসংখ্য বিন্যাস আছে। এই সকল বিন্যাসের পদগুলির জন্যও একাধিক প্রক্রিয়া থাকে। অধিকাংশ বিন্যাসের পদ পাটীগাণিতিক রাশি (arithmetical number) নয় এবং তাহাদের প্রক্রিয়াগুলিও পাটীগাণিতিক প্রক্রিয়া হইতে ভিন্ন হইবে। স্থতরাং তাহাদের নাম ও চিহ্ন ভিন্ন হইতে পারে। তবে প্রক্রিয়াগুলিকে অনেক সময় যোগ, গুণ (পাটীগাণিতিক শব্দটি বাদ দিয়া) ইত্যাদি বলা হয় এবং $(+)$, $(.)$ ইত্যাদি চিহ্নই ব্যবহার করা হয়। বর্তমান অনুচ্ছেদে কোন বিন্যাসের কোন প্রক্রিয়ার চিহ্নরূপে $\odot$ এবং θ চিহ্ন দুইটি ব্যবহার করা হইবে। বর্তমান অনুচ্ছেদে প্রক্রিয়া বলিতে দ্বিপদ প্রক্রিয়াকে বুঝান হইয়াছে।

S একটি বিন্যাস। এবং $a \in S$, $b \in S$ মনে কর $\odot$ এমন একটি প্রক্রিয়া যে $a \odot b \in S$. যদি Sএর প্রত্যেক দুইটি পদ a ও bএর জন্য $a \odot b \in S$ হয়, তবে $\odot$ প্রক্রিয়াকে S বিন্যাসে **প্রযোজ্য** একটি প্রক্রিয়া বলা হয় এবং বিন্যাসটিকে প্রক্রিয়াটির পক্ষে একটি **বদ্ধ বিন্যাস (closed set)** বলা হয়। যদি Sএর বিশেষ দুইটি পদ a ও bএর জন্য $a \odot b \in S$ হয়, তবে প্রক্রিয়াটি কেবল মাত্র ঐ দুইটি পদের জন্য প্রযোজ্য।

$(+)$ বা যোগ প্রক্রিয়াটি সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাসে প্রযোজ্য। কিন্তু $(-)$ বা বিয়োগ প্রক্রিয়াটি ঐ বিন্যাসের জন্য প্রযোজ্য নয়। কারণ $5+7=12$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। কিন্তু $5-12=-7$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নয়।

বিনিময় নিয়ম (Commutative Law): মনে কর $\odot$ একটি বিন্যাস S-এ প্রযোজ্য একটি প্রক্রিয়া। যদি বিন্যাসটির প্রত্যেক দুইটি পদ a ও b এর জন্য $a \odot b = b \odot a$ হয়, তবে S বিন্যাসটিতে $\odot$ প্রক্রিয়াটির বিনিময় নিয়ম সিদ্ধ। যদি S-এর বিশেষ দুইটি পদ a ও bএর জন্য $a \odot b = b \odot a$ হয়, তবে বলা হয় যে $\odot$ প্রক্রিয়াটির বিনিময় নিয়মটি কেবলমাত্র ঐ দুইটি পদের জন্য সিদ্ধ।

সংযোগ নিয়ম (Associative Law): মনে কর $\odot$ একটি বিন্যাস A-তে প্রযোজ্য একটি প্রক্রিয়া। যদি বিন্যাসটির প্রত্যেক তিনটি পদ a, b

ও cএর জন্য $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ হয়, তবে বিন্যাসটিতে $\odot$ প্রক্রিয়াটির সংযোগ নিয়ম সিদ্ধ। যদি বিন্যাসটির বিশেষ তিনটি পদ a, b ও cএর জন্য $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$ হয়, তবে $\odot$ প্রক্রিয়াটির সংযোগ নিয়মটি কেবলমাত্র ঐ তিনটি পদের জন্য সিদ্ধ।

বিচ্ছেদ নিয়ম (Distributive Law) মনে কর $\odot$ ও θ একটি বিন্যাস S-এ প্রযোজ্য দুইটি প্রক্রিয়া। যদি বিন্যাসটির প্রত্যেক তিনটি পদ a, b ও cএর জন্য $a \odot (b \,\theta\, c) = (a \odot b) \,\theta\, (a \odot c)$ হয়, তবে বিন্যাসটিতে $\odot$ ও θ প্রক্রিয়ার বামদিকের বিচ্ছেদ নিয়ম সিদ্ধ। অনুরূপে বিন্যাসটিতে $\odot$ ও θ প্রক্রিয়ার ডান দিকের বিচ্ছেদ নিয়ম সিদ্ধ হইবে যদি $(b \,\theta\, c) \odot a = (b \odot a) \,\theta\, (c \odot a)$ হয়। আবার θ ও $\odot$ প্রক্রিয়া দুইটির বিচ্ছেদ নিয়ম দুইটি হইল,

$$a \,\theta\, (b \odot c) = (a \,\theta\, b) \odot (a \,\theta\, c)$$

এবং $(b \odot c) \,\theta a = (b \,\theta\, a) \odot (c \,\theta\, a)$.

যদি S বিন্যাসের প্রক্রিয়া দুইটি (+) ও (.) হয়, তবে বিচ্ছেদ নিয়মগুলিকে নিম্নরূপে লেখা যায়:

$$a(b+c) = ab + ac.$$

$$(b+c)\, a = ba + ca.$$

$$a + bc = (a+b)(a+c)$$

$$bc + a = (b+a)(c+a).$$

যদি S বিন্যাসটিতে θ ও $\odot$ প্রক্রিয়া দুইটির বা (.) ও θ প্রক্রিয়া দুইটির উভয় দিকের বিচ্ছেদ নিয়ম সিদ্ধ হয় তবে বিন্যাসটিতে যথাক্রমে θ ও $\odot$ প্রক্রিয়াদ্বয়ের এবং $\odot$ ও θ প্রক্রিয়াদ্বয়ের বিচ্ছেদ নিয়ম সিদ্ধ। যদি কোন বিন্যাসের বিশেষ তিনটি পদের জন্য কোন বিচ্ছেদ নিয়ম সিদ্ধ হয়, তবে ঐ বিচ্ছেদ নিয়মটি ঐ বিশেষ তিনটি পদের জন্য সিদ্ধ বলা হইবে।

উদাহরণ। মনে কর J^+ সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস।

$\therefore\ 5 \in J^+,\ 6 \in J^+$ এবং $7 \in J^+$.

এক্ষেত্রে, $5+6=6+5$ (যোগের বিনিময় নিয়ম)

$5 \times 6 = 6 \times 5$ (গুণের বিনিময় নিয়ম)

$(5+6)+7 = 5+(6+7)$ (যোগের সংযোগ নিয়ম)

$(5 \times 6) \times 7 = 5 \times (6 \times 7)$ (গুণের সংযোগ নিয়ম)

$5(6+7)=5.6+5.7=6.5+7.5=(6+7).5$

(গুণ ও যোগের বিচ্ছেদ নিয়ম)

দেখ $5+6.7=5+42=47$

এবং $(5+6)(5+7)=11.12=132$

$\therefore \quad 5+6.7 \neq (5+6)(5+7)$

সুতরাং ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাসে যোগ ও গুণের বিনিময় নিয়ম অসিদ্ধ।

একক পদ (Unit element বা Identity element) : মনে কর একটি বিন্যাস A-তে প্রযোজ্য একটি প্রক্রিয়া $\odot$, যদি e এবং e' কোন বিন্যাসের দুইটি পদ এরূপ হয় যে প্রত্যেক $a \in$ Aএর জন্য $e \odot a=a$ এবং $a \odot e'=a$ তবে e ও e'-কে $\odot$ প্রক্রিয়ার জন্য বিন্যাসটির যথাক্রমে বাম একক পদ ও ডান একক পদ বলা হইবে।

যদি $a.e=e.a=a$ হয়, তবে eকে একক পদ বলা হইবে এবং এইক্ষেত্রে বাম একক পদ ও ডান একক পদ দুইটি সমান।

J বিন্যাসটিতে '0' (শূন্য) এবং 1 যথাক্রমে যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া দুইটির একক পদ।

§3. **যোগ, ছেদ, অন্তর (Union, Intersection and Difference).** মনে কর, A ও B দুইটি বিন্যাস। যে বিন্যাসের প্রতিটি পদ A বা B বা উভয়ের একটি পদ তাহাকে A ও B বিন্যাস দুইটির **যোগবিন্যাস (Union)** বলা হয়। এবং এই বিন্যাসটিকে $A \cup B$ রূপে লেখা হয়। $\therefore \quad A \cup B=\{x=x \varepsilon A$ বা $^{*} x \varepsilon B\}$ আবার যে বিন্যাসের প্রতিটি পদ A ও B উভয়েরই পদ, তাহাকে বিন্যাস দুইটির ছেদ (Intersection) বলে এবং লেখা হয় $A \cap B$. $\therefore \quad A \cap B=\{x : x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B\}$. যদি $A \cap B=\phi$ হয়, তবে A ও B-র কোন সাধারণ পদ নাই এবং A ও Bকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন বলা হয়।

উপপাদ্য 1. যদি $A \subset B$ এবং $A \subset C$ হয়, তবে (i) $A \subset B \cup C$ এবং (ii) $A \subset B \cap C$.

---

* 'বা' শব্দটির বিশেষ একটি গাণিতিক ব্যবহার আছে। $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B$ বলিতে x, A ও B উভয় বিন্যাসের পদ এই সম্ভাবনাকেও বোঝায়।

প্রমাণ। মনে কর $x \varepsilon A$; যেহেতু $A \subset B$ এবং $A \subset C$ $\therefore$ $x \varepsilon B$ এবং $x \varepsilon C$ $\therefore$ $x \varepsilon B \cup C$ এবং $x \varepsilon B \cap C$ এবং ইহা প্রত্যেক $x \varepsilon A$এর জন্য সত্য। $\therefore$ Aএর প্রত্যেক পদ $B \cup C$ বা $B \cap C$এর পদ। সুতরাং $A \subset B \cup C$ এবং $A \subset B \cap C$.

উপপাদ্য 2. $A \cup B = B \cup A$ অর্থাৎ দুইটি বিন্যাসের যোগ প্রক্রিয়াটির ক্ষেত্রে বিনিময় নিয়ম সিদ্ধ।

প্রমাণ। মনে কর $x \varepsilon A \cup B$

$\therefore$ $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B$

অর্থাৎ $x \varepsilon B$ বা $x \varepsilon A$

$\therefore$ $x \varepsilon B \cup A$.

$\therefore$ $A \cup B \subset B \cup A$.

অনুরূপে $B \cup A \subset A \cup B$

$\therefore$ $A \cup B = B \cup A$.

উপপাদ্য 3. $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

প্রমাণ। মনে কর, $x \varepsilon A$.

$\therefore$ $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B$.

$\therefore$ $x \varepsilon A \cup B$.

$\therefore$ $A \subset A \cup B$.

অনুরূপে $B \subset A \cup B$

উপপাদ্য 4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

প্রমাণ। মনে কর $x \varepsilon (A \cup B) \cup C$

$\therefore$ $x \varepsilon A \cup B$ বা $x \varepsilon C$.

অর্থাৎ $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B$ বা $x \varepsilon C$.

$\therefore$ $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B \cup C$.

অর্থাৎ $x \varepsilon A \cup (B \cup C)$.

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

অনুরূপে $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$.

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

উপপাদ্য 5. $A \cap B = B \cap A$,

মনে কর, $x \varepsilon A \cap B$ $\therefore$ $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$.

অর্থাৎ $x \varepsilon B$ এবং $x \varepsilon A$

$\therefore$ $x \varepsilon B \cap A$

$\therefore$ $A \cap B \subset B \cap A$

অনুরূপে $B \cap A \subset A \cap B$.

$\therefore$ $A \cap B = B \cap A$.

উপপাদ্য 6. $A \cap B \subset A, A \cap B \cap B$

প্রমাণ। মনে কর $x \varepsilon A \cap B$ $\therefore$ $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$.

$\therefore$ $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$.

উপপাদ্য 7. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

প্রমাণ। মনে কর $x \varepsilon (A \cap B) \cap C$

$\therefore$ $x \varepsilon A \cap B$ এবং $x \varepsilon C$.

$\therefore$ $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$ এবং $x \varepsilon C$

$\therefore$ $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B \cap C$

$\therefore$ $x \varepsilon A \cap (B \cap C)$

সুতরাং $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

অনুরূপে $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \subset C$

$\therefore$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

উপপাদ্য 8. যদি $A \subset B$ হয়, তবে $A \cap B = A$ এবং $A \cup B = B$.

প্রমাণ। $\because$ $A \subset B$, $x \varepsilon A$ হইলে $x \varepsilon B$.

এখন মনে কর, $x \varepsilon A \cap B$; $\therefore$ $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$ অর্থাৎ $x \varepsilon A$.

$\therefore$ $A \cap B \subset A$.

আবার যদি $x \varepsilon A$ হয়, তবে $x \varepsilon B$ $\therefore$ $x \varepsilon A \cap B$ এবং $A \subset A \cap B$.

$\therefore$ $A = A \cap B$.

আবার মনে কর, $x \varepsilon A \cup B$ $\therefore$ $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B$ অর্থাৎ $x \varepsilon B$ বা $x \varepsilon B$

[কারণ $x \varepsilon A$ হইলে $x \varepsilon B$]

$\therefore$ $A \cup B \subset B$.

যদি $x \varepsilon B$ হয়, তবে $x \varepsilon A$ বা $x \varepsilon B$ অর্থাৎ $x \varepsilon A \cup B$ $\therefore$ $B \subset A \cup B$

$\therefore$ $A \cup B = B$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি U সার্বিক বিন্যাস হয়, $\because\ A \subset X$,

$A \cap X = A$ এবং $A \cup X = X$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. যদি ϕ শূন্যবিন্যাস হয়, $\phi \subset A$

$\therefore\ A \cap \phi = \phi \quad \therefore\ A \cup \phi = A$.

উপপাদ্য 9. A ও B যে কোন দুইটি বিন্যাসের জন্য

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

প্রমাণ। (i) মনে কর $x \varepsilon A \cap (B \cup C)$

$\therefore\ x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B \cup C$.

$\therefore\ x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$ বা $x \varepsilon C$.

অর্থাৎ $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$ বা $x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon C$

অর্থাৎ $x \varepsilon A \cap B$ বা $x \varepsilon A \cap C$.

অর্থাৎ $x \varepsilon (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore\ A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cup C)$

আবার মনে কর $x \varepsilon (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore\ x \varepsilon (A \cap B)$ বা $x \varepsilon (A \cup C)$

$\therefore\ x \varepsilon A$ এবং $x \varepsilon B$ বা $x \in A$ এবং $x \in C$.

অর্থাৎ $x \in A$ এবং $x \in B$ বা $x \in C$.

অর্থাৎ $x \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$\therefore\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) মনে কর $x \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore\ x \in A$ বা $x \in B$ এবং $x \in C$.

$\therefore\ x \in A$ বা $x \in B$ এবং $x \in A$ বা $x \in C$.

$\therefore\ x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\therefore\ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

সুতরাং $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

পুনরায় মনে কর, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore\ x \in (A \cup B)$ এবং $x \in A \cup C$

অর্থাৎ $x \in A$ বা $x \in B$ এবং $x \in A$ বা $x \in C$.

অর্থাৎ $x \in A$ বা $x \in B$ এবং $x \in C$.

$\therefore\ x \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore\ (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

$\therefore\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

দ্বিত্বনীতি (**Principle of Duality**) উপপাদ্য 9-এ দেখ (i)এ যেখানে $\cap$ চিহ্ন, (ii)এ সেখানে $\cup$ চিহ্ন এবং (i)এ যেখানে $\cup$ চিহ্ন, (ii)এ সেখানে $\cap$ চিহ্ন। ইহা হইতে বুঝা যায় কতকগুলি বিন্যাসকে যদি $\cap$ ও $\cup$ চিহ্ন যুক্ত করিয়া কোন সুসমঞ্জস ফল (symmetric result) পাওয়া যায় তবে ঐ $\cap$ ও $\cup$ চিহ্ন দুইটি যদি পারস্পরিক স্থান পরিবর্তন করে, তবে আর একটি সুসমঞ্জস ফল পাওয়া যাইবে। ইহাকে বিন্যাসের **দ্বিত্বনীতি বা Principle of Duality** বলে।

দুইটি বিন্যাসের অন্তর : মনে কর, A ও B দুইটি বিন্যাস এবং B বিন্যাসটি A বিন্যাসটির একটি যথার্থ উপবিন্যাস। $\{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$ বিন্যাসটিকে বলা হইবে A ও B বিন্যাস দুইটির অন্তর এবং ইহাকে $A-B$ রূপে লেখা হয়। $A-B$কে অনেক সময় A বিন্যাসে B বিন্যাসের আপেক্ষিক পূরক লেখা হয়। যদি U সার্বিক বিন্যাস হয় তবে $U-B$ বিন্যাসটি অর্থাৎ $\{x : x \notin B\}$ বিন্যাসটিকে B বিন্যাসের পূরক বলা হয় এবং লেখা হয় $U-B=B'$. এবং $(U-B)' = B$ আবার $(B')' = (U-B)' = B$

ডি'মরগ্যানের উপপাদ্য (Demorgan's Theorem) :

উপপাদ্য 10. **A, B ও C** যে কোন তিনটি বিন্যাস হইলে—

$$(A-B) \cap (A-C) = A-(B \cup C)$$

এবং $(A-B) \cup (A-C) = A-(B \cap C)$

প্রমাণ। মনে কর, $x \in (A-B) \cap (A-C)$

$\therefore\ x \in A-B$ এবং $x \in A-C$

অর্থাৎ $x \in A$ এবং $x \notin B$ এবং $x \in A$ এবং $x \notin C$.

অর্থাৎ $x \in A$ এবং $x \notin B \cup C$

অর্থাৎ $x \in A-(B \cup C)$

$\therefore\ (A-B) \cap (A-C) \subset A-(B \cup C)$

বিপরীতক্রমে মনে কর, $x \in A-(B \cup C)$

$\therefore\ x \in A$ এবং $x \notin B \cup C$

অর্থাৎ $x \in A$ এবং $x \notin B$ বা $x \notin C$

অর্থাৎ $x \in A$ ও $x \notin B$ এবং $x \in A$ ও $x \notin C$

অর্থাৎ $x \in A-B$ এবং $x \in A-C$.

অর্থাৎ $x \in (A-B) \cap (A-C)$

সুতরাং, $A-(B \cup C) \subset (A-B) \cap (A-C)$

$\therefore \quad A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়,

$A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

উপপাদ্য 11. A ও B যে কোন দুইটি বিন্যাস এবং U সার্বিক বিন্যাস। x, U এর একটি পদ। x, $A \cap B$ $A \cap B'$ $A' \cap B$ এবং $A' \cap B'$ বিন্যাস চারটির একটি এবং একটি মাত্র পদ।

প্রমাণ। মনে করা যাক $x \in A$ $\therefore$ $x \notin A'$

এক্ষণে $x \in B$ অথবা $x \in B'$

যদি $x \in B$ হয়, তবে $x \notin B'$

$\therefore$ $x \in A \cap B$ এবং $x \notin A \cap B'$

আবার যেহেতু $x \notin A'$, $\therefore$ $x \notin A' \cap B$ এবং $x \notin A' \cap B'$.

সুতরাং $x \in A$ এবং $x \in B$ হইলে x একমাত্র $A \cap B$ বিন্যাসের পদ।

অনুরূপে $x \in A$ এবং $x \notin B$ বা $x \in B'$ হইলে x একমাত্র $A \cap B'$ এর পদ।

আবার যদি $x \notin A$ হয়, অর্থাৎ $x \in A'$ হয়, তবে অনুরূপে প্রমাণ করা যায় x একটি মাত্র বিন্যাসের পদ। সুতরাং প্রতিটি ক্ষেত্রেই x প্রদত্ত চারটি বিন্যাসের পদ এবং ইহাই প্রমাণিতব্য।

উদাহরণমালা 2

1. মনে কর A, 50 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল অখণ্ড সংখ্যার বিন্যাস এবং B, 45 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল স্বাভাবিক সংখ্যার বিন্যাস। $A \cap B$ বিন্যাসটি নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে কর, $x \in B$; $\therefore$ x, 45 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। সুতরাং x, 50 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একটি অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore$ $x \in A$ $\therefore$ $B \subset A$ $\therefore$ $A \cap B=B$.

2. মনে কর $A=\{p, q, r\}$ $B=\{r, s\}$; $C=\{1, 3, 4\}$

$D=10$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সকল স্বাভাবিক যুগ্ম সংখ্যার বিন্যাস।

$E=\phi$; $F=\{r, s, t\}$ $G=\{4\}$.

$H=\{p, q, r, s\}$.

(*a*) $A\cap B$ (*b*) $C\cap D$ (*c*) $B\cap F$ (*d*) $A\cap E$; (*e*) $(A\cap B)\cap G$ (*f*) $C\cap(D\cap H)$

উঃ (*a*) দেখ $r\varepsilon A$ এবং $r\varepsilon B$ এবং A ও B এর অন্য কোন সাধারণ পদ নাই। $\therefore$ $A\cap B=\{r\}$.

(*b*) $C=\{1, 3, 4\}$ $D=\{2, 4, 6, 8\}$

$\therefore$ $C\cap D=\{4\}=G$.

(*c*) দেখ, $B\subset F$ $\therefore$ $B\cap F=B$.

(*d*) $A\cap E=A\cap\phi=\phi$;

(*e*) $A\cap B=\{r\}$; $G=\{4\}$. $(A\cap B)\cap G=\phi=E$.

(*f*) $D=\{2, 4, 6, 8\}$ এবং $H=\{p, q, r, s\}$

$\therefore$ $D\cap H=\phi$; $\therefore$ $C\cap(D\cap H)=C\cap\phi=\phi$.

3. মনে কর A ও B যথাক্রমে একটি বিদ্যালয়ের ফুটবল ও ক্রিকেট খেলোয়াড়দের বিন্যাস। $A\cap B=\phi$ এবং $A\cap B=B$ এর অর্থ নির্ণয় কর।

উঃ $\because$ $A\cap B=\phi$, A ও B এর কোন সাধারণ পদ নাই। অর্থাৎ ঐ বিদ্যালয়ের কোন ফুটবল খেলোয়াড় ক্রিকেট খেলোয়াড় নয় এবং কোন ক্রিকেট খেলোয়াড় ফুটবল খেলোয়াড় নয়।

আবার $A\cap B=B$, হইলে $B\subset A$.

(মনে কর $x\varepsilon B$ $\therefore$ $x\varepsilon A\cap B$ $\therefore$ $x\varepsilon A$).

অর্থাৎ প্রত্যেক ক্রিকেট খেলোয়াড় একজন ফুটবল খেলোয়াড়।

4. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ?

(*a*) তোমার শ্রেণীর সকল বালকের বিন্যাস এবং তোমার শ্রেণীর সকল বালিকার বিন্যাস।

(*b*) ইংরাজি বর্ণমালার সকল অক্ষরের বিন্যাস এবং 'LETTER' শব্দটির সকল অক্ষরের বিন্যাস।

উঃ (*a*) যেহেতু বালকদের বিন্যাসের কোন পদ কোন বালিকা হইতে পারে

না এবং বালিকাদের বিন্যাসের কোন পদ কোন বালক হইতে পারে না, বিন্যাস দুইটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

(*b*) 'LETTER' শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাসের চারটি পদ L, E, T ও R এবং যেহেতু ইহারা ইংরাজী বর্ণমালার অক্ষর। ইহারা ইংরাজী বর্ণমালার সকল অক্ষরের বিন্যাসের পদ এবং বিন্যাস দুইটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন নয়।

5. মনে কর $A=\{a, b, c, d\}$ এবং $B=\{b, d, e\}$. B বিন্যাসে কি কোন পদ আছে, যাহা A বিন্যাসের পদ ?

উঃ AUB-র পদগুলি লিখিতে, কোন পদকে কি একাধিক বার লইবে? AUB-র সকল পদগুলি লিখ।

B বিন্যাসের b ও d পদ দুইটি A বিন্যাসের পদ। এই পদ দুইটি উভয় বিন্যাসের পদ হইলেও AUB বিন্যাসে উহাদের একাধিক বার লওয়া হইবে না।

$A\cup B=\{a, b, c, d, e\}$.

6. মনে কর P তোমার শ্রেণীর সকল ছাত্র-ছাত্রীর বিন্যাস। G সকল ছাত্রীর এবং B সকল ছাত্রের বিন্যাস।

= এই চিহ্ন ব্যবহার করিয়া P, G ও B এর মধ্যে একটি সম্পর্ক লিখ।

উঃ এখানে $G\subset P$ এবং $B\subset P$ এবং G ও B পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

$\therefore\ P=G\cup B.$

7. মনে কর $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ সার্বিক বিন্যাস। $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ বিন্যাসটি কি Uএর উপবিন্যাস ? এই বিন্যাসের পূরক বিন্যাসটি নির্ণয় কর।

উঃ $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ বিন্যাসটি প্রত্যেকটি পদ Uএর একটি পদ

$\therefore$ ইহা Uএর একটি উপবিন্যাস। এই উপবিন্যাসটির পূরক উপবিন্যাস $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. দেখ $\{0, 2, 4, 6, 8\}\cup\{1, 3, 5, 7, 9\}=U$

8. নিম্নের বিন্যাস দুইটির ছেদ, যোগ ও অন্তর নির্ণয় কর।

(i) $\{x : 1\leqslant x\leqslant 30$ এবং x একটি যুগ্মসংখ্যা $\}$

(ii) $\{x : 1\leqslant x\leqslant 30$ এবং x, 3-এর একটি গুণিতক $\}$

উঃ মনে কর বিন্যাস দুইটি A ও B.

স্পষ্টতঃ $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$

$B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

A ও B-এর সাধারণ পদ 6, 12, 18, 24 ও 30

$\therefore\ A\cup B=\{6, 12, 18, 24, 30\}$

আবার $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30\}$.

$A - B = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28\}$

$B - A = \{3, 9, 15, 21, 27\}$.

9. $A \neq \phi$ যে-কোন বিন্যাস হইলে দেখাও $A - \phi = A$ এবং $\phi - A = \phi$

উঃ $A - \phi$ বিন্যাসটির পদগুলি A বিন্যাসের পদ যাহারা ϕ বিন্যাসের পদ নয়। যেহেতু ϕ বিন্যাসে কোন পদ নাই, $\therefore$ $A - \phi$-এর পদগুলি A বিন্যাসের পদ এবং A বিন্যাসের পদগুলি $A - \phi$ বিন্যাসের পদ। $\therefore$ $A - \phi = A$.

আবার $\phi - A$ বিন্যাসের পদগুলি ϕ বিন্যাসের পদ যাহারা A বিন্যাসের পদ নয়। যেহেতু ϕ বিন্যাসে কোন পদ নাই, এমন কোন পদ পাওয়া যাইবে না যাহারা ϕ বিন্যাসের পদ এবং A বিন্যাসের পদ নয়। $\therefore$ $\phi = A$ শূন্যবিন্যাস। অর্থাৎ $\phi - A = \phi$.

10. প্রমাণ কর যে A, B ও C যে-কোন তিনটির বিন্যাস হইলে $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

উঃ মনে কর $x \in A \cap (B - C)$

$\therefore$ $x \in A$ এবং $x \in B$ ও $x \notin C$

$\therefore$ $x \in A \cap B$ ও $x \notin C$

$\therefore$ $x \in (A \cap B) - C$

সুতরাং $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - C$

আবার মনে কর $x \in (A \cap B) - C$

$\therefore$ $x \in A \cap B$ এবং $x \notin C$

$\therefore$ $x \in A$ ও $x \in B$ এবং $x \notin C$

$\therefore$ $x \in A$ এবং $x \in B - C$

$\therefore$ $x \in A \cap (B - C)$

$\therefore$ $(A \cap B) - C \subset A \cap (B - C)$

$\therefore$ $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$.

11. একটি গ্রন্থাগারে কেবলমাত্র গণিত, ভূগোল এবং ইতিহাস পুস্তক আছে এবং পুস্তকগুলি ইংরাজি, বাংলা অথবা হিন্দীতে লেখা। সকল গণিত পুস্তক এবং কিছু ভূগোল পুস্তক ইংরাজিতে লেখা। অন্যান্য ভূগোল পুস্তকগুলি

হিন্দীতে লেখা। ইতিহাস পুস্তকগুলি বাংলায় লেখা। মনে কর গ্রন্থাগারের সকল পুস্তকের বিন্যাসটি সার্বিক বিন্যাস U

এবং M, সকল গণিত পুস্তকের বিন্যাস।

G, সকল ভূগোল পুস্তকের বিন্যাস।

H, সকল ইতিহাস পুস্তকের বিন্যাস।

A, ইংরাজিতে লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

B, বাংলায় লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

C, হিন্দীতে লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

ডিমরগ্যানের উপপাদ্যের সাহায্য ব্যতিরেকে দেখাও যে,

(i) $(C \cup M)' = C' \cap M'$

(ii) $(C \cup H)' = C' \cap H'$

উ: এখানে $C \cup M$, হিন্দীতে লেখা সকল ভূগোল পুস্তক এবং সকল গণিত পুস্তকের বিন্যাস।

$\therefore$ $(C \cup M)'$, ইংরাজিতে লেখা সকল ভূগোল পুস্তক এবং সকল ইতিহাস পুস্তকের বিন্যাস।

C', ইংরাজিতে লেখা সকল ভূগোল পুস্তক এবং সকল গণিত ও ইতিহাস পুস্তকের বিন্যাস।

M', সকল ইতিহাস ও ভূগোল পুস্তকের বিন্যাস।

$\therefore$ $C' \cap M'$, ইংরাজিতে লেখা সকল ভূগোল পুস্তক এবং সকল ইতিহাস পুস্তকের বিন্যাস।

$\therefore$ $(C \cup M)' = C' \cap M'$.

আবার $C \cup H$, হিন্দীতে লিখিত সকল পুস্তক এবং সকল ইতিহাস পুস্তকের বিন্যাস অর্থাৎ, হিন্দী এবং বাংলায় লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

(কারণ, এখানে $H = B$)

$\therefore$ $(C \cup H)'$, ইংরাজিতে লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

আবার C', ইংরাজি ও বাংলায় লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

এবং H', সকল গণিত ও ভূগোল পুস্তকের বিন্যাস অর্থাৎ,

ইংরাজি ও হিন্দীতে লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

$\therefore$ $C' \cap H'$, ইংরাজিতে লিখিত সকল পুস্তকের বিন্যাস।

$\therefore$ $(C \cup H)' = C' \cap H'$.

12. প্রমাণ কর যে, যদি $X \subset Y$ হয় তবে $Y' \subset X'$

উঃ মনে কর $x \in Y'$ $\therefore$ $x \notin Y$,

এক্ষণে যেহেতু $X \subset Y$, $\therefore$ $x \notin X$

$\therefore$ $x \in X'$

$\therefore$ $Y' \subset X'$

অনুসিদ্ধান্ত। যদি $Y' \subset X'$ হয় তবে $X \subset Y$; কারণ $\because$ $Y' \subset X'$ $\therefore$ $(X')' \subset (Y')'$ অর্থাৎ $X \subset Y$.

13. A, B, C ও D চারটি প্রদত্ত বিন্যাস এবং

$A \subset C$, $B' \subset A'$, $C \cap D' = \phi$

দেখাও $A \subset B \cap D$

উঃ মনে কর $x \in A$ $\therefore$ $x \notin A'$ $\therefore$ $x \notin B'$ [$\because$ $B' \subset A'$]

সুতরাং $x \in B$.

আবার যেহেতু $A \subset C$, $x \in C$ $\therefore$ $x \notin D'$ [$\because$ $C \cap D' = \phi$]

সুতরাং $x \in D$

$\therefore$ $x \in B \cap D$ $\therefore$ $A \subset B \cap D$.

14. নিম্নের বক্তব্যগুলি হইতে কি সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পার ?

(*i*) যে সকল ছাত্র পরিশ্রম করে না তাহারা ভাল ছাত্র নয়।

(*ii*) ভাল ছাত্ররা পরীক্ষায় ভাল ফল করে।

(*iii*) যে সকল ছাত্র পরিশ্রম করে এবং পরীক্ষায় ভাল ফল করে, তাহারা ভাল চাকুরী পায়।

উঃ মনে কর, A = সকল পরিশ্রমী ছাত্রের বিন্যাস।

B = সকল ভাল ছাত্রের বিন্যাস।

C = যে সকল ছাত্র পরীক্ষায় ভাল ফল করে তাহাদের বিন্যাস।

D = যে সকল ছাত্র ভাল চাকুরী পায় তাহাদের বিন্যাস।

(*i*) হইতে পাই, $A' \subset B'$ $\therefore$ $B \subset A$ [উদাহরণ 12]

(*ii*) হইতে পাই $B \subset C$ $\therefore$ $B \subset A \cap C$.

(*iii*) হইতে পাই $A \cap C \subset D$.

$\therefore$ $B \subset D$.

অর্থাৎ ভাল ছাত্ররা ভাল চাকুরী পায়।

15. নিম্নের তিনটি বক্তব্য হইতে বিন্যাসের সাহায্যে কি কি সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পার ?

(i) যাঁহারা বিঠোফেনের অনুরাগী নহেন, তাঁহারা যখন মুন্‌লাইট সোনোটা (Moonlight Sonota) বাজান হয়, তখন চুপ করিয়া থাকিতে পারেন না।

(ii) গিনিপিগ্‌রা সঙ্গীতানুরাগী নয়।

(iii) সঙ্গীতানুরাগী নয় এমন কেহ যখন মুনলাইট সোনেটা বাজান হয়, তখন চুপ করিয়া থাকে না।

[লুই ক্যারল অবলম্বনে]

উঃ মনে কর, A=সকল গিনিপিগের বিন্যাস।

B=সঙ্গীতানুরাগী নহেন এমন সকল প্রাণীর বিন্যাস।

C=যে সকল প্রাণী মুন্‌লাইন সোনেটা বাজানর কালে চুপ করিয়া থাকে।

D=যে সকল প্রাণী বিঠোফেনের অনুরাগী।

দেখ, (i) $D' \subset C'$.

(ii) $A \subset B$

এবং (iii) $B \cap C = \phi$.

16. তোমার জান যদি $x \varepsilon A$ এবং $A \subset B$ হয়, তবে $x \varepsilon B$.

এখন দেখাও যে যদি (*i*) সকল মানুষ স্তন্যপায়ী হয় এবং (*ii*) রাম যদি মানুষ হয়, তবে (*iii*) রাম স্তন্যপায়ী।

উঃ মনে কর A=সকল মানুষের বিন্যাস

B=সকল স্তন্যপায়ীর বিন্যাস

$\therefore A \subset B$.

$\therefore$ যেহেতু রাম, মানুষ $\therefore$ রাম εA এবং, $\because A \subset B$,

$\therefore$ রাম εB.

অর্থাৎ রাম স্তন্যপায়ী।

17. মনে কর,

V=সকল মনুষ্যের বিন্যাস।

I=সকল ভারতবাসীর বিন্যাস।

E=সকল ইংল্যাণ্ডবাসীর বিন্যাস।

C=সকল কফি প্রিয় ব্যক্তির বিন্যাস।

T=সকল চা প্রিয় ব্যক্তির বিন্যাস।

M=সকল দুগ্ধপায়ির বিন্যাস।

K=সকল খুনী ব্যক্তির বিন্যাস।

P=সকল দার্শনিকের বিন্যাস।

নীচের বক্তব্যগুলিকে উপরের বিন্যাসগুলির সাহায্যে প্রকাশ কর :

(*i*) যে সকল ভারতবাসী দুগ্ধ খান তাঁহাদের অনেকে দার্শনিক।

(*ii*) কোন ইংল্যাণ্ডদেশবাসী ভারতীয় নন।

(*iii*) যে সকল ব্যক্তি দুগ্ধ ও কফি পান করে তাহারা চাও পান করে।

(*iv*) খুনী ইংল্যাণ্ডদেশবাসীরা কফি, চা এবং দুগ্ধ পান করে।

(*v*) কিছু কিছু ভারতবাসী খুনী ব্যক্তি কফি এবং চা পান করে কিন্তু, দুগ্ধ পান করে না।

(*vi*) দার্শনিক চা বা কফি পান করে না।

(*vii*) কিছু কিছু ইংল্যাণ্ডদেশবাসী হয় খুনী নয়'ত দার্শনিক।

(*viii*) যাহারা কফি পান করে তাহারা চা অথবা দুগ্ধ পান করে।

(*ix*) ইংল্যাণ্ডদেশবাসী খুনী ব্যক্তিরা যাহারা দুগ্ধ পান করে, তাহারা চা বা কফি পান করে না।

উঃ (*i*) এখানে অন্ততঃ একজন ব্যক্তি আছেন যিনি (*i*) একজন ভারতবাসী অর্থাৎ Iএর একটি পদ (*ii*) একজন দুগ্ধপায়ী অর্থাৎ Mএর একটি পদ এবং (*iii*) একজন দার্শনিক অর্থাৎ Pএর একটি পদ। অর্থাৎ অন্ততঃ একজন ব্যক্তি আছেন যিনি $I \cap M \cap P$ এর একটি পদ। $I \cap M \cap P \neq \phi$.

(*ii*) এই বক্তব্যের অর্থ ইংল্যাণ্ডদেশবাসীর বিন্যাস E ও ভারতীদের বিন্যাস Iএর কোন সাধারণ পদ নাই অর্থাৎ $E \cap I = \phi$.

(*iii*) যে ব্যক্তি দুগ্ধপায়ী সে M বিন্যাসের একটি পদ এবং যে ব্যক্তি কফি প্রিয় সে C বিন্যাসের একটি পদ

$\therefore$ যে ব্যক্তি দুগ্ধপায়ী এবং কফি প্রিয় সে $M \cap C$এর একটি পদ।

আবার দুগ্ধপায়ী এবং কফি প্রিয় ব্যক্তি চা প্রিয়, অতএব ঐ ব্যক্তি Tএর একটি পদ $\therefore$ $M \cap C \subset T$.

(*iv*) যে ব্যক্তি কফি পান করে সে Cএর একটি পদ, যে চা পান করে সে Tএর একটি পদ এবং যে দুগ্ধ পান করে সে Mএর একটি পদ।

∴ যে ব্যক্তি কফি, চা এবং দুগ্ধ পান করে সে $C \cap T \cap M$এর একটি পদ। যে ব্যক্তি ইংল্যাণ্ডদেশবাসী সে Eএর একটি পদ এবং যে ব্যক্তি খুনী সে Kএর একটি পদ। অতএব যে ব্যক্তি ইংল্যাণ্ডদেশবাসী এবং খুনী সে $K \cap E$এর একটি পদ।

যেহেতু প্রত্যেক ইংল্যাণ্ডদেশবাসী খুনী ব্যক্তি কফি, চা এবং দুগ্ধ পান করে,

∴ $K \cap E$এর প্রত্যেকটি পদ $C \cap T \cap M$এর একটি পদ।

∴ $K \cap E \subset C \cap T \cap M$.

(*v*) যে ব্যক্তি ভারতবাসী সে Iএর একটি পদ এবং যে খুনী সে Kএর একটি পদ। ভারতবাসী খুনী ব্যক্তি $I \cap K$এর একটি পদ। আবার যে ব্যক্তি কফি ও চা খায় সে $C \cap T$এর একটি পদ। সুতরাং যে সকল ভারতবাসী খুনী চা ও কফি খায় সে $I \cap K \cap C \cap T$এর একটি পদ। যে সকল ভারতবাসী খুনী চা ও কফি পান করে কিন্তু দুগ্ধ পান করে না, তাহারা $I \cap K \cap C \cap T$এর পদ কিন্তু, Mএর পদ নয়। অতএব তাহারা $(A \cap K \cap C \cap T) - W$এর পদ। বর্তমান প্রশ্নানুসারে $(A \cap K \cap C \cap T) - M$এর পদ এইরূপ কিছু কিছু ব্যক্তি আছে। সুতরাং $A \cap K \cap C \cap T - M \neq \phi$.

(*vi*) যাহারা চা বা কফি পান করে তাহাদের বিন্যাস $C \cap T$ যাহারা দার্শনিক তাহাদের বিন্যাস P. যেহেতু দার্শনিক চা বা কফি পান করেন না,

$$\therefore \quad (C \cap T) \cap P = \phi.$$

(*vii*) যাহারা খুনী বা দার্শনিক তাহাদের বিন্যাস $K \cup P$, যেহেতু কিছু কিছু ইংল্যাণ্ডদেশবাসী খুনী বা দার্শনিক, ∴ $(K \cup P) \cap E \neq \phi$.

(*viii*) যাহারা চা বা দুগ্ধ পান করে, তাহাদের বিন্যাস $T \cup M$. যাহারা কফি পান করে তাহাদের বিন্যাস C. যেহেতু যাহারা কফি পান করে তাহারা চা বা দুগ্ধ পান করে, $C \subset T \cup M$.

(*ix*) যে সকল ব্যক্তি ইংল্যাণ্ডদেশবাসী এবং খুনী তাহাদের বিন্যাস $E \cap K$. তাহাদের মধ্যে যাহারা দুগ্ধ পান করে তাহাদের বিন্যাস $E \cap K \cap M$. যাহারা কফি বা চা পান করে তাহাদের বিন্যাস $C \cap T$। যেহেতু ইংল্যাণ্ড-দেশবাসী খুনী ব্যক্তিরা যাহারা দুগ্ধ পান করে তাহারা চা বা কফি পান করে না, $(E \cap K \cap M) \cap (C \cap T) = \phi$.

প্রশ্নমালা 2

1. মনে কর, $A=\{x: \ 50\leqslant x\leqslant 100\}$

এবং $B=\{x: \ 60\leqslant x\leqslant 125\}$.

$A\cap B$ বিন্যাসটি নির্ণয় কর।

2. মনে কর, $A=$সকল ভারতীয়ের বিন্যাস।

$T=$পৃথিবীর সকল শিক্ষকের বিন্যাস।

$M=$পৃথিবীর সকল মানুষের বিন্যাস।

$A\cap T$; $(A\cap T)\cap M$; $A\cap(T\cap M)$ বিন্যাসগুলি নির্ণয় কর।

3. মনে কর, $U=$একটি সঙ্ঘের সকল সদস্যের বিন্যাস।

$M=$সঙ্ঘের খেলোয়াড় নির্বাচক উপ-সমিতির সদস্যদের বিন্যাস।

$P=$সঙ্ঘের অনুষ্ঠান উপসমিতির সদস্যদের বিন্যাস।

যদি কেবলমাত্র a ও b, M ও P উভয়েরই পদ হয়, নীচেরগুলি সত্য কি অসত্য নির্ণয় কর এবং কেন বল :

(a) $U\cap P=P$. (b) $U\cap M=U$. (c) $P\cap M=\{a, b\}$

(d) $U\cap P=\phi$. (e) $(U\cap P)\cap M=U\cap(P\cap M)$ (f) $U\cap M=M$

(g) $U\cap M=\phi$.

4. মনে কর $A=\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,\cdots\}$

এবং $B=\{0, 3, 6, 9, 12, 15, \cdots\}$

$A\cap B$ নির্ণয় কর।

5. মনে কর $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B=\{1, 3, 5\}$

এবং $C=\}0, 2, 4\}$

যোগ ও ছেদের সংজ্ঞা হইতে দেখাও যে নিম্নের প্রত্যেকটি সত্য :

(a) $A\cup B=B\cup A$ (b) $A=B\cup C$. (c) $A\cup B=A$

(d) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (e) $A\cup C=A$

(f) $(A\cup B)\cup C=A\cup(C\cup B)$ (g) $(B\cup A)\cup C=C\cup(A\cup B)$.

(h) $A\cup\phi=A$.

6. মনে কর $P=\{0, 2, 4, 6,8\}$.

$W=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$Q=\{1, 3, 5, 7\}$; $Q=\{0, 3, 6, 9\}$.

নীচের বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটির সকল পদগুলি নির্ণয় কর :

(a) $P \cap R'$ (b) $Q'UR$ (c) $P'U(QUR)$ (d) PUW.

(e) $P \cap W$ (f) $P' \cap (QUR)$ (g) $(R \cap Q)UP'$

(h) $(PUQ) \cap R$.

7. নীচের বিন্যাসগুলির কোন্‌গুলি বিচ্ছিন্ন এবং কোন্‌গুলি বিচ্ছিন্ন নয় এবং কেন :

(a) $A=\{1, 2, 3. 4\}$; $B=\{2, 3, 4, 5\}$.

(b) $C=\{x: 0 \leqslant x \leqslant 30\}$; $D=\{x=30 < x \leqslant 60\}$

(c) $E=\{x:$ x পশ্চিমবঙ্গের বিধানসভার সদস্য$\}$

$F=\{x:$ x পশ্চিমবঙ্গ হইতে নির্বাচিত লোকসভার সদস্য$\}$

(d) $E=\{x:$ x পশ্চিমবঙ্গের বিধানসভার সদস্য$\}$

$G=\{x:$ x পশ্চিমবঙ্গের মন্ত্রিসভার সদস্য$\}$.

(e) উপরের F ও G.

8. কোন বিদ্যালয়ের প্রত্যেক শ্রেণীতে 'ক' ও 'খ' দুইটি বিভাগ আছে। মনে কর A=ঐ বিদ্যালয়ের সকল 'ক' বিভাগের ছাত্রের বিন্যাস।

B=ঐ বিদ্যালয়ের নবমশ্রেণীর সকল ছাত্রের বিন্যাস।

$A \cap B$, AUB, $A-B$ এবং $B-A$ নির্ণয় কর।

9. A ও B দুইটি বিন্যাস। প্রমাণ কর যে,

(i) $A-B=\phi$ হইলে $A \subset B$.

(ii) $A \subset B$ হইলে $A-B=\phi$

10. নিম্নের বক্তব্যগুলি হইতে বিন্যাসের সাহায্যে কি কি সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পার :

(i) অবিজ্ঞাপিত কোন খেলা সার্কাসে দেখান হয় না।

(ii) চারবার ডিগবাজি খাইতে হয় এইরূপ খেলা সম্ভব নয়।

(iii) সার্কাসের বিজ্ঞাপনে কখনও অসম্ভব খেলা বিজ্ঞাপিত হয় না।

(লুই ক্যারল অবলম্বনে)

11. নিম্নের বক্তব্যগুলি হইতে বিন্যাসের সাহায্যে কি কি সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পার :

(i) যে অঙ্ক লইয়া আমি হৈচৈ করি না, সেই অঙ্ক আমি বুঝিতে পারি।

(ii) আমি যে সকল অঙ্ক করিতে অভ্যস্ত, তাহাদের ন্যায় এই অঙ্কগুলি সঠিক ক্রমানুসারে সাজান নয়।

(iii) কোন সহজ অঙ্ক আমার মাথাব্যথার কারণ হয় না।

(iv) যে সকল অঙ্ক সঠিক ক্রমানুসারে সাজান নয়, তাহা আমি বুঝিতে পারি না। (লুই ক্যারল্ অবলম্বনে)

12. কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের ছাত্রদের সম্বন্ধে নীচের চারটি বক্তব্য লক্ষ্য কর :

(i) সকল ইঞ্জিনিয়ারিং ছাত্র গণিত অধ্যয়ন করে।

(ii) কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ে কোন মহিলা ইঞ্জিনিয়ারিং অধ্যয়ন করে না।

(iii) যে সকল ছাত্র গণিত অধ্যয়ন করে না, তাহারা রসায়ন শাস্ত্রজ্ঞ নহে।

(iv) প্রত্যেক পুরুষ শিক্ষার্থী সামরিক বিজ্ঞান অধ্যয়ন করে।

এখন বল উপরের ব্যক্তব্যগুলি হইতে নীচের সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হইতে পার কিনা ? তোমার বক্তব্যের যুক্তি বিন্যাসের সাহায্যে প্রকাশ কর।

(a) যে সকল ছাত্র গণিত অধ্যয়ন করে না তাহারা ইঞ্জিনিয়ারিং ছাত্র নয়।

(b) কোন ইঞ্জিনিয়ারিং ছাত্র রসায়ন শাস্ত্রজ্ঞ নয়।

(c) প্রত্যেক ইঞ্জিনিয়ারিং ছাত্র গণিত এবং সামরিক বিজ্ঞান উভয়ই অধ্যয়ন করে।

(d) সকল ইঞ্জিনিয়ারিং ছাত্র রসায়ন শাস্ত্রজ্ঞ।

(e) যে সকল রসায়ন শাস্ত্রজ্ঞ শিক্ষা গ্রহণ করে তাহারা গণিত অধ্যয়ন করে।

(f) প্রত্যেক মহিলা ইঞ্জিনিয়ারিং ছাত্র রসায়ন শাস্ত্রজ্ঞ।

13. নীচের বক্তব্যগুলি হইতে কি সিদ্ধান্তে আসিতে পার ? তোমার সিদ্ধান্তের যুক্তি বিন্যাসের সাহায্য লইয়া প্রকাশ কর।

(a) কোন অসাধু ব্যক্তি কখনও সম্মানিত হন না।

(b) কোন সাধু ব্যক্তি কখনও মিথ্যা কথা বলেন না।

(c) চতুর না হইলে কোন ব্যক্তি সম্মানিত হইতে পারেন না।

(d) প্রত্যেক চতুর ব্যক্তিকে মাঝে মাঝে মিথ্যা কথা বলিতে হয়।

§4. **ভেন্‌চিত্র (Venn Diagram)** বিন্যাস সম্পর্কে পূর্বে যে সকল আলোচনা করা হইয়াছে, তাহা সহজেই চিত্রের সাহায্যে বুঝা যায়। বিখ্যাত ইংরেজ তর্কশাস্ত্রবিদ্ জন্ ভেন্ যুক্তিশাস্ত্রের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের জন্য সর্বপ্রথম চিত্রের সাহায্য গ্রহণ করিয়াছিলেন। এইজন্য যে চিত্রের সাহায্যে এক বা একাধিক বিন্যাস ও উপবিন্যাসের প্রকাশ করা হয়, তাহাকে ভেন্‌চিত্র (Venn Diagram) বলে।

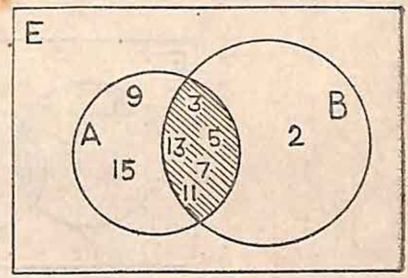
ভেন্‌চিত্রে জ্যামিতিক চিত্রের ভিতর ও বাহিরের ক্ষেত্র দ্বারা বিন্যাস ও উপবিন্যাস নির্দেশ করা হয়। অনেক সময় সার্বিক-বিন্যাসকে একটি আয়তক্ষেত্রের দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1. মনে কর সার্বিক বিন্যাস $E=\{x : 2 \leqslant x \leqslant 15\}$

$A=\{x : x$ একটি অযুগ্ম সংখ্যা$\}$

$B=\{x : x$ একটি মৌলিক সংখ্যা$\}$

E, A ও Bকে আয়তক্ষেত্র ও দুইটি বৃত্তের সাহায্যে প্রকাশ করা হইল।



চিত্র 1

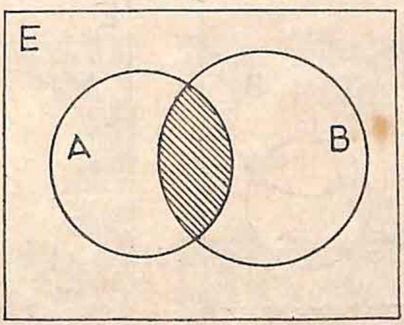
যেহেতু কম সংখ্যক পদ এখানে সংশ্লিষ্ট, তাই বিন্যাসের পদগুলিকেও দেখান গিয়াছে। আরও দেখ, রেখিত অংশ উভয় বিন্যাসের ছেদ বিন্যাস।

উদাহরণ 2. মনে কর সার্বিক বিন্যাস

$E=\{x : x$ একটি শহরের যুবক$\}$

$A=\{x : x$ ঐ শহরের সকল ফুটবল খেলোয়াড়$\}$

$B=\{x : x$ ঐ শহরের সকল ক্রিকেট খেলোয়াড়$\}$



চিত্র 2

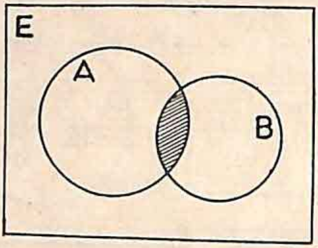
এখানে বিন্যাসগুলি সসীম হইলেও উহাদের পদ সংখ্যা স্বল্প সংখ্যক নহে এবং অজ্ঞাত। রেখিত অংশ $A \cap B$ এবং এই বিন্যাসের পদ সেই সকল যুবক যাহারা ফুটবল ও ক্রিকেট উভয় খেলায় পারদর্শী।

উদাহরণ 3, মনে কর, সার্বিক বিন্যাস

$E = \{x : x$ একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $\}$

$A = \{x : x$ একটি ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা এবং $x > 50\}$

$B = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 100\}$.

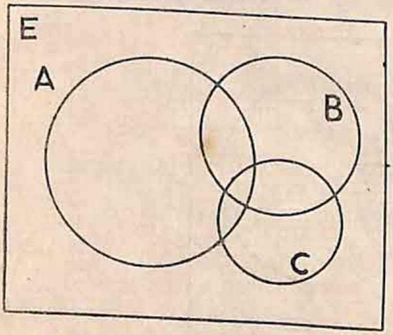


চিত্র 3.

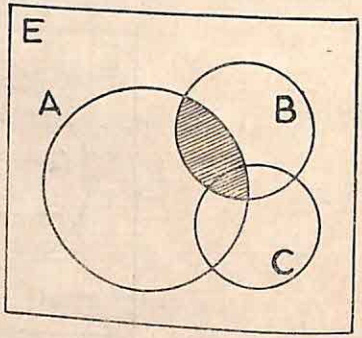
এখানে E ও A অসীম বিন্যাস এবং B একটি সসীম বিন্যাস।

রেখিত অংশ $A \cap B = \{x : 51 \leqslant x \leqslant 100$ এবং x একটি অযুগ্ম সংখ্যা$\}$

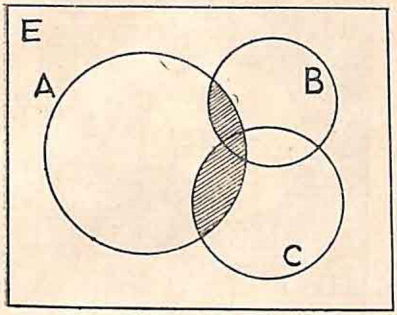
নীচে দুই বা ততোধিক বিন্যাসের ছেদ, যোগ, অন্তর, পূরক প্রভৃতির ভেন্ চিত্র দেওয়া হইল।



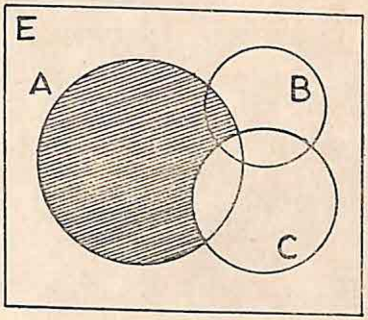
চিত্র 4



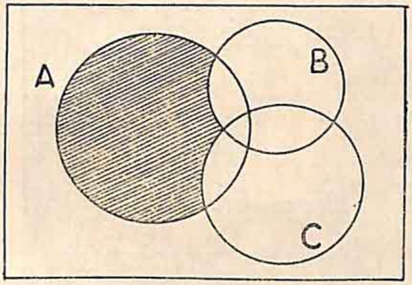
চিত্র 5 $A \cap B$



চিত্র 6. A∩(B∪C)

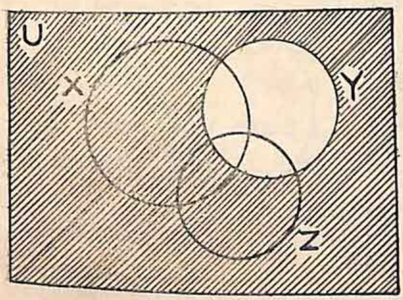


চিত্র 7 A − C

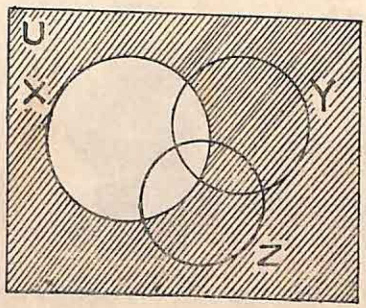


চিত্র 8 A − (B∪C)

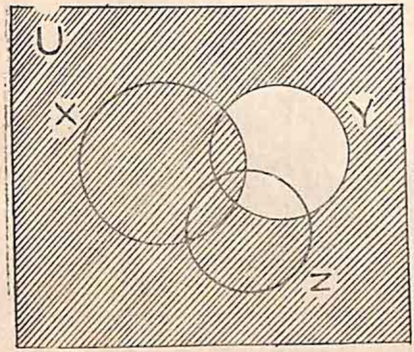
উদাহরণ 4. মনে কর ∪ সার্বিক বিন্যাস।
(X∪Y′)∩(X′∪Z)-এর ভেন্ চিত্র অঙ্কন কর।



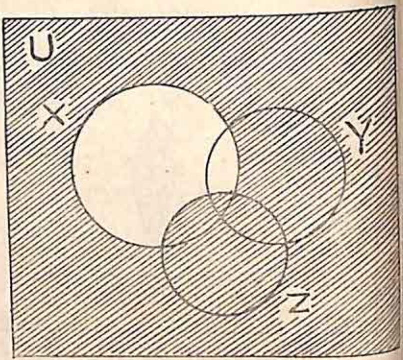
রেখিত অংশ Y′



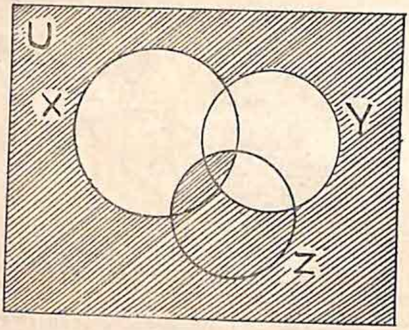
রেখিত অংশ X′



রেখিত অংশ $X \cup Y'$

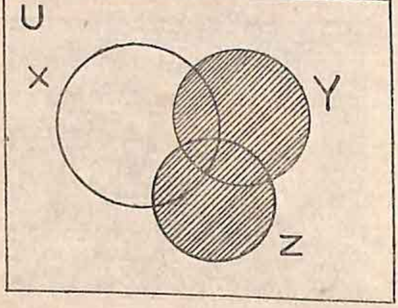


রেখিত অংশ $X' \cup Z$

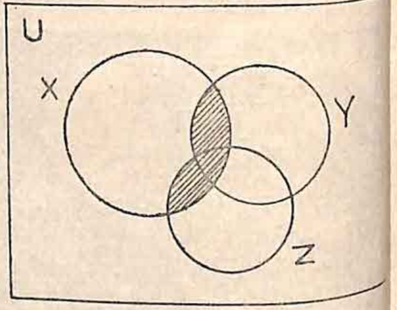


রেখিত অংশ $(X \cup Y') \cap (X' \cup Z)$

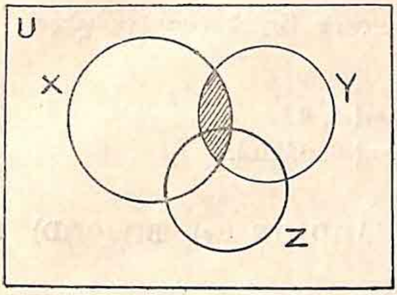
উদাহরণ ৫. ভেন্ চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর যে
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) . \cup (X \cap Z)$.



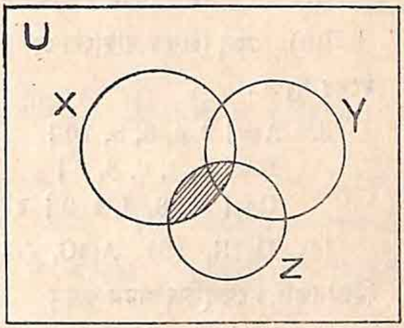
$Y \cup Z$ চিত্র (a)



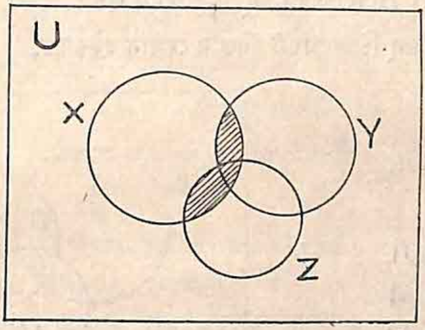
$X \cap (Y \cup Z)$ চিত্র (b)



$X \cap Y$ চিত্র (c)



$X \cap Z$ চিত্র (d)



$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ চিত্র (e)

চিত্র (b) ও চিত্র (c) হইতে পাই,

$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

প্রশ্নমালা 3

প্রত্যেক উদাহরণে E সার্বিক বিন্যাস।

1. মনে কর, E={ x : x ইংরাজি বর্ণমালার অক্ষর }
A={ x : x ইংরাজি বর্ণমালার প্রথম দশটি অক্ষর }
B={ x : x ইংরাজি বর্ণমালার সকল ব্যঞ্জনবর্ণ }

প্রত্যেক পদ দেখাইয়া, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ ও $B - A$-এর ভেন্ চিত্র অঙ্কন কর।

2. মনে কর, A একটি বিদ্যালয়ের ফুটবল দল ও B ঐ বিদ্যালয়ের ক্রিকেট দল।

(i) ক্রিকেট দলের কয়েকজন খেলোয়াড় ফুটবল দলেরও সদস্য দেখাইয়া একটি ভেন্‌চিত্র অঙ্কন কর।

(ii) A ও B-র কোন সাধারণ সদস্য নাই দেখাইয়া ভেন্ চিত্র অঙ্কন কর।

(iii) ভেন্ চিত্রের সাহায্যে দেখাও প্রত্যেক ক্রিকেট খেলোয়াড় ফুটবল দলের সদস্য।

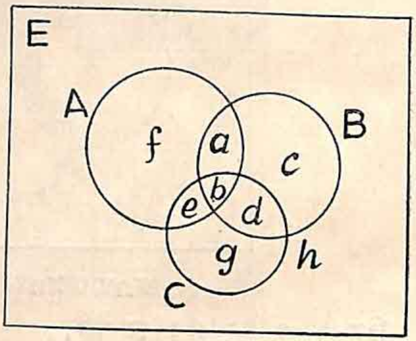
3. A={ 2, 4, 6, 8, 10 } D={ 6, 8 }
B={ 1, 3, 6, 8, 9 } E={ 6, 8, 10 }.
C={ 10, 8, 6, 4, 2 }, হইলে

(i) $D\cap E$, (ii) $A\cap C$, (iii) $(A\cap D)\cap E$ (iv) $B\cap(C\cap D)$ বিন্যাসগুলির ভেন্‌চিত্র অঙ্কন কর।

4. $A=\{x, y, z\}$; $B=\{a, b, c\}$: $C=\{x, y, z, c, p\}$ হইলে (i) $A\cap C$ ও (ii) $B\cap C$-এর ভেন্ চিত্র অঙ্কন কর।

5. পাশের ভেন্ চিত্রে চারটি বিন্যাস দেখান হইয়াছে,

$U=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
$A=\{a, b, e, f\}$
$B=\{a, b, c, d\}$
$C=\{b, d, e, g\}$



$A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$ ও $(A\cup B)\cap C$ বিন্যাসগুলির পদগুলি নির্ণয় কর।

6. X, Y, Z তিনটি বিন্যাস। নিম্নের বিন্যাসগুলির ভেন্ চিত্র অঙ্কিত কর।

(i) $(X\cup Y')\cap(X'\cup Y)$

(ii) $X\cap(X\cup Y)$

(fii) $(X\cap Y)\cup(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$

7, ভেন্ চিত্র সাহায্যে প্রমাণ কর :

(i) $X\cup(X'\cap Y)=X\cup Y$

(ii) $(X\cup Y)\cap(X'\cup Z)=(X\cap Z)\cup(X'\cap Y)$

8. ভেন্ চিত্র সাহায্যে সরল কর :

(i) $[X'\cap(Y\cup Z)]'$

(ii) $(X\cup Y')\cap(X'\cup Z)\cap(Y\cup Z')$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা (Boolean Algebra)

§5. **সংজ্ঞা ও ধর্ম ঃ** মনে করা যাক (+) ও (.) একটি বিন্যাস B-তে প্রযোজ্য দুইটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। Bকে একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা (Boolean Algebra) বলা হয়, যদি ঐ প্রক্রিয়া দুইটি নিম্নলিখিত শর্তগুলি পূরণ করে।

$\mathbf{B_1}$ $a+b=b+a$ এবং $a.b=b.a$, যদি $a\in B$, $b\in B$ হয়।

$\mathbf{B_2}$ (+) ও (.) প্রক্রিয়া দুইটির জন্য দুইটি ভিন্ন একক পদ 0 এবং 1 থাকে, অর্থাৎ $a\in B$ হইলে $a+0=a=0+a$ এবং $a.1=a=1\,a$.

$\mathbf{B_3}$ $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$ এবং $a+(b\,c).=(a+b)(a+c)$

এবং $\mathbf{B_4}$ B-এর প্রত্যেক পদ a'-র জন্য একটি $a'\in B$ পাওয়া যাইবে যে $a+a'=1$ এবং $aa'=0$.

a'কে a-এর **পূরক (complement)** বলা হয়।

$a+b$কে a ও b-এর যোগফল এবং $a.b$কে a ও b-এর গুণফল বলা হইবে। সুতরাং (+) ও (.) প্রক্রিয়া দুইটিকে যোগ ও গুণ প্রক্রিয়া বলা হইবে। মনে রাখিবে এই যোগ ও গুণ পাটীগাণিতিক যোগ ও গুণ হইতে ভিন্ন। $a.b$কে অনেক সময় ab লেখা হয়। আমরা বারবার বন্ধনীর প্রয়োগ না করিয়া প্রথাগতভাবে (+) ও (.) উভয় প্রক্রিয়া দ্বারা সংযুক্ত কোন পদে প্রথমে (.) বা গুণ-এর প্রক্রিয়া আগে প্রয়োগ করিবার এবং (+) বা যোগের প্রক্রিয়া পরে প্রয়োগ করিবার প্রথা (convention) অনুসরণ করিব। সুতরাং B_2কে এখন নিম্নের ন্যায় লেখা যাইবে।

$\mathbf{B_2}$: $a\,(b+c)=ab+ac$ এবং $a+bc=(a+b)(a+c)$.

যেহেতু উপরের চারিটি শর্ত প্রক্রিয়া দুইটির পক্ষে সুসমঞ্জস (Symmetric), এখানেও দ্বিত্বনীতি (Principle of Duality) সিদ্ধ। সুতরাং বলা যাইতে পারে,

"যদি (+) ও (.) প্রক্রিয়া দুইটিকে এবং '0' ও '1' একক পদ দুইটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার শর্ত চারটি ($\mathbf{B_1}-\mathbf{B_4}$) হইতে প্রাপ্ত কোন অভেদ বা উপপাদ্যে পারস্পরিক পরিবর্তন করা হয় (অর্থাৎ (+)-এর স্থানে (.),

(.)-এর স্থানে (+) এবং '0'-এর স্থানে '1' এবং '1'-এর স্থানে '0' লেখা হয়), তবে পরিবর্তিত অভেদ বা উপপাদ্যগুলিও সিদ্ধ অভেদ বা সিদ্ধ উপপাদ্য হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার একক পদ দুইটি '1' এবং '0' দ্বারা চিহ্নিত হয় আবার '1' ও '0' দুইটি অখণ্ড সংখ্যা। কিন্তু দুইটি ক্ষেত্রে '1'-এর অর্থ ভিন্ন বা '0'-এর অর্থ ভিন্ন। যথা—বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার ক্ষেত্রে $1+1=1$; কিন্তু অখণ্ড সংখ্যা 1-এর ক্ষেত্রে $1+1=2$; সুতরাং উভয় 1কে বা উভয় 0কে সতর্কতার সহিত যথাযথ অর্থসহ গ্রহণ করিতে হইবে। বর্তমান অধ্যায়ে আমরা অনেক সময় $n \geqslant 1$ বা $n \geqslant 0$ লিখিব। সেখানে কিন্তু n, 1 এবং 0 প্রত্যেকে অখণ্ড সংখ্যা।

নীচের উপপাদ্যগুলিতে B একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

উপপাদ্য 1. যদি $a \in B$ হয়, তবে a-এর একাধিক পূরক থাকিতে পারে না। অর্থাৎ, বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার প্রত্যেকটি পদের একটি এবং একটিমাত্র পূরক থাকে।

প্রমাণ। সম্ভব হইলে মনে করা যাক, $x \in B$ এবং $y \in B$; a-এর দুইটি পূরক।

$\therefore \quad a+x=1,\ ax=0\ ;\ a+y=1,\ ay=0$

একক্ষণে $x=1.x$ (B_2 অনুসারে)

$=(a+y).x$

$=ax+yx$ (B_3 অনুসারে)

$=0+yx$

$=yx$ (B_2 অনুসারে)

$=xy$ (B_1 অনুসারে)

$=xy+0$ (B_2 অনুসারে)

$=xy+ay$

$=(x+a)\,y$ (B_3 অনুসারে)

$=1.y$

$=y$ (B_2 অনুসারে)

সুতরাং a-এর পূরক দুইটি সমান।

সুতরাং a-এর একাধিক পূরক থাকিতে পারে না।

উপরের উপপাদ্যে যেখানে বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার নিয়মগুলি (B_1-B_4) ব্যবহৃত হইয়াছে, তাহা উল্লেখ করা হইয়াছে। পরের উপপাদ্যগুলিতে তাহা উল্লেখ করা হইল না। কোন্ স্থানে কোন্ নিয়ম ব্যবহার করা হইতেছে তাহা তোমরা নির্ণয় কর।

উপপাদ্য 2. যদি $a\in B$ হয় এবং a', a-এর পূরক হয়, তবে a'-এর পূরক a অর্থাৎ $(a')'=a$.

প্রমাণ। যেহেতু $a+a'=1$, $\therefore\ a'+a=1$

এবং $aa'=0$, $\therefore\ a'a=0$

সুতরাং a, a' এর পূরক হইতে পারে।

উপপাদ্য 1 অনুযায়ী আর কোন x-এর জন্য $x+a=1$ এবং $x.a=0$ হইবে না। $\therefore$ a, a'-এর পূরক অর্থাৎ $(a')'=a$.

উপপাদ্য 3. যদি $a\in B$ হয়, তবে $a+a=a$ এবং $a.a=a$;

প্রমাণ।

$$\begin{aligned} a &= a+0 & a &= a.1\\ &= a+aa' & &= a.(a+a')\\ &= (a+a)(a+a') & &= a.a+aa'\\ &= (a+a).1 & &= a.a+0\\ &= a+a & &= a.a. \end{aligned}$$

উপপাদ্য 4. যদি $a\in B$ হয়, তবে $a+1=1$ এবং $a.0=0$

প্রমাণ।

$$\begin{aligned} 1 &= a+a' & 0 &= aa'\\ &= a+a'.1 & &= a.(a'+0)\\ &= (a+a')(a+1) & &= a.a'+a.0\\ &= (1)(a+1) & &= 0+a\,0\\ &= a+1 & &= a.0 \end{aligned}$$

উপপাদ্য 3 এবং উপপাদ্য 4-এ একটি করিয়া অংশের প্রমাণ করিলেই যথেষ্ট হইত, কারণ প্রত্যেক অংশ অপরটির দ্বিত্ব (Dual). দ্বিত্বনীতির উদাহরণ-স্বরূপ এই দুইটি উপপাদ্যে উভয় অংশই প্রমাণ করা হইল।

উপপাদ্য 5. $0'=1$ এবং $1'=0$

প্রমাণ। উপপাদ্য 4 হইতে পাই $1+0=1$ এবং $1.0=0$

এক্ষণে যেহেতু কোন পদের একাধিক পূরক থাকিতে পারে না (উপপাদ্য 1)। $\therefore$ $0'=1$ এবং $1'=0$.

উপপাদ্য 6. $a \in B$, $b \in B$ হইলে,

$$a+ab=a \text{ এবং } a(a+b)=a$$

প্রমাণ। আমরা নীচে প্রমাণ করিতেছি $a(a+b)=a$.

দ্বিত্বনীতি অনুযায়ী $a+ab=a$ হইবে।

এক্ষণে, $a=0+a$

$$=(0.b)+a$$
$$=(0+a)(b+a)$$
$$=a.(a+b).$$

উপপাদ্য 7. বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রায় উভয় প্রক্রিয়ার সংযোগ নিয়মসিদ্ধ।

প্রমাণ। আমরা প্রথমে যোগের সংযোগ নিয়মটি প্রমাণ করিতেছি।

মনে করা যাক, a, b, c, B-এর তিনটি পদ।

অতএব প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a+(b+c)=(a+b)+c$

এক্ষণে $a[a+(b+c)]$

$=a$ [উপপাদ্য 6]

$=a+ac$ [উপপাদ্য 6]

$=a(a+b)+ac$ [উপপাদ্য 6]

$=a[(a+b)+c]$ [B_3]

$\therefore\ a[a+(b+c)]=a[(a+b)+c] \cdots (1)$

আবার $a'[a+(b+c)]$

$=a'a+a'(b+c)$ [B_3]

$=0+a'(b+c)$ [B_2]

$=a'(b+c)$ [B_4]

$=a'b+a'c$ [B_3]

$=[0+a'b]+a'c$ [B_2]

$=[a'a+a'b]+a'c$ [B_4]

$=a'(a+b)+a'c$ [B_3]

$=a'[(a+b)+c]$ [B_3]

$\therefore\ a'[a+(b+c)]=a'[(a+b)+c] \cdots (2)$

এক্ষণে সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করিয়া পাই

$$a[a+(b+c)]+a'[a+(b+c)]=a[(a+b)+c]+a'[(a+b)+c] \ldots (3)$$

এক্ষণে সমীকরণ (3)-এর

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= a[a+(b+c)]+a'[a+(b+c)] \\ &= [a+(b+c)]a+[a+(b+c)]a' \\ &= [a+(b+c)](a+a') \\ &= [a+(b+c)].1 \\ &= a+(b+c) \end{aligned}$$

অনুরূপে সমীকরণ (3)-এর দক্ষিণপক্ষ $=(a+b)+c$

$\therefore \quad a+(b+c)=(a+b)+c.$

উপপাদ্য 8. (ডিমরগ্যানের উপপাদ্য) যদি $a \in B$, $b \in B$ হয়,

তবে (i) $(a+b)'=a'b'$

(ii) $(ab)'=a'+b'$

প্রমাণ।

$$\begin{aligned} & a+b+a'b' \\ &= (a+b+a')(a+b+b') \\ &= (b+a+a')(a+b+b') \\ &= (b+1)(a+1) \\ &= 1.1 \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & (a+b)a'b' \\ &= aa'b'+ba'b' \\ &= aa'b'+a'bb' \\ &= 0.b'+a'.0 \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

এক্ষণে B_4 এবং উপপাদ্য 1 অনুসারে বলিতে পারা যায় $(a+b)'=a'b'$

এক্ষণে দ্বিত্বনীতি অনুযায়ী $(ab)'=a'+b'$.

সুতরাং ডিমরগ্যানের উপপাদ্য প্রমাণিত হইল।

বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার উদাহরণ।

উদাহরণ 1. কোন বিন্যাসের সকল উপবিন্যাসগুলির বিন্যাস একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা (The set of all subsets of a set is a Boolean Algebra).

মনে কর X একটি বিন্যাস এবং ϕ শূন্য বিন্যাস।

মনে কর A, X-এর সকল উপবিন্যাসের বিন্যাস।

এক্ষণে, যোগ ($\cup$) এবং ছেদ ($\cap$)কে A-এর দুইটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ায় (+) ও (.) মনে কর।

যেহেতু $P \in A$, $Q \in A$ হইলে $P \cup Q \in A$ এবং $P \cap Q \in A$,

$\therefore$ দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি Aতে প্রযোজ্য।

এক্ষণে, (i) $P \in A$, $Q \in A$ হইলে,

$$P+Q=P \cup Q=Q \cup P=Q+P.$$

এবং $P.Q=P \cap Q=Q \cap P=Q.P$

(ii) $P \in A$ হইলে, $P+\phi=P \cup \phi=P$

এবং $P.X=P \cap X=P$

সুতরাং ϕ ও X প্রক্রিয়া দুইটির দুইটি ভিন্ন একক পদ।

(iii) $P \in A$, $Q \in A$, $R \in A$ হইলে, প্রথম অধ্যায়ের অনুচ্ছেদ 3 (§3) হইতে পাই, $P.(Q+R)=P \cap (Q \cup R)=(P \cap Q) \cup (P \cap R)=P.Q+P.R$

এবং $P+QR=P \cup (Q \cap R)=(P \cup Q) \cap (P \cup R)=(P+Q)(P+R)$

(iv) $P \in A$ হইলে $P'=X-P$ বিন্যাসটি P-এর পূরক।

কারণ, $P+P'=P \cup P'=X$ এবং $P.P'=P \cap P'=\phi$

সুতরাং A-এর পদগুলি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার সব কয়টি শর্ত পূরণ করে।

$\therefore$ A একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 2. B একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা। 1 এবং 0, B-এর দুইটি একক পদ। {1, 0} বিন্যাসটি একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

স্পষ্টতঃ {1, 0} বিন্যাসটি B-এর একটি উপবিন্যাস।

$\therefore$ B_1, ও B_3, {1, 0}এর পদগুলির জন্য সিদ্ধ। এবং $1'=0$ ও $0'=1$

যেহেতু $1+0=1$, $0+0=0$ এবং $1.0=0$, $0.0=0$

অতএব B_2 সিদ্ধ।

সুতরাং {1, 0} বিন্যাসটির পদগুলি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার সকল নিয়ম মানে।

$\therefore$ বিন্যাসটি একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

উদাহরণ 3. X যে-কোনও একটি বিন্যাস। $\{X, \phi\}$ বিন্যাসটি একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

X-এর সকল উপবিন্যাসের বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা A মনে কর। $\therefore$ X এবং ϕ A-এর দুইটি একক পদ। $\therefore$ উদাহরণ 2 অনুযায়ী $\{X, \phi\}$ বিন্যাসটি একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

ক্রম্ (Order)

সংজ্ঞা। একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা Bএর যে কোন দুইটি পদ a ও bএর জন্য যদি $ab'=0$ হয়, তবে $a\leqslant b$ এবং যদি $a\leqslant b$ হয় তবে $ab'=0$.

$\leqslant$ চিহ্নটিকে ক্রম্ (Order)এর চিহ্ন বলে।

উপপাদ্য 9. যদি a, b, c কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা B-এর তিনটি পদ হয়, তবে

(i) $a\leqslant b, b\leqslant c$ হইলে $a\leqslant c$ হইবে।

(ii) $a\leqslant b, a\leqslant c$, হইলে $a\leqslant b\,c$ হইবে।

(iii) যদি $a\leqslant b$ হয়, তবে $a\leqslant b+c$, (c, B-এর যে কোন পদ)

এবং (iv) $a\leqslant b$ হইলে $b'\leqslant a'$

এবং $b'\leqslant a'$ হইলে $a\leqslant b$

প্রমাণ। (i) যেহেতু $a\leqslant b$ এবং $b\leqslant c$ $\therefore$ $ab'=0$ এবং $bc'=0$

এক্ষণে $ac'=ac'.1=ac'.(b+b')=ac'b+ac'b'=abc'+ab'c'$

$=a.0+0.c=0+0=0$

$\therefore$ $a\leqslant c$.

(ii) যেহেতু $a\leqslant b$ এবং $a\leqslant c$ $\therefore$ $ab'=0$ এবং $ac'=0$

এক্ষণে $a(bc)'=a(b'+c')=ab'+ac'=0+0=0$

$\therefore$ $a\leqslant bc$

(iii) যেহেতু $a\leqslant b$ $\therefore$ $ab'=0$

এক্ষণে যে কোন $c\in B$ এর জন্য

$a(b+c)'=a(b'c')=(ab')c'=0.c'=0$

$\therefore$ $a\leqslant b+c$

(iv) প্রথমে মনে করা যাক, $a\leqslant b$ $\therefore$ $ab'=0$

এক্ষণে $b'(a')'=b'a=ab'=0$ $\therefore$ $b'\leqslant a'$

বিপরীত ক্রমে মনে করা যাক, $b'\leqslant a'$ $\therefore$ $b'(a')'=0$ বা $b'a=0$

অর্থাৎ $ab'=0$ $\therefore$ $a\leqslant b$.

উদাহরণমালা 3

1. যদি $ax=bx$, এবং $ax'=bx'$ হয়, দেখাও $a=b$.

উঃ যেহেতু $ax=bx$

এবং $ax'=bx'$

(যোগ করিয়া পাই) $a(x+x')=b(x+x')$

বা $a.1=b.1$

বা $a=b$.

2. প্রমাণ কর যে, কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা B-এর যে কোন দুইটি পদ a ও b হইলে, $a+a'b=a+b$

উঃ $a+a'b=a+ab+a'b$

$=a+(a+a')b$

$=a+1.b$

$=a+b$.

3. B একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা। a, b এবং c, B-এর তিনটি পদ দেখাও যে $(a+b)(a'+c)(b+c)=ac+a'b+bc$

উঃ $(a+b)(a'+c)(b+c)=(ac+a'b+bc)(b+c)$

$=acb+a'b+ac+a'bc.+bc$

$=(a+a')bc+a'b+ac+bc=1.bc+a'b+ac+bc$

$=bc+a'b+ac$.

4. a এবং b একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার দুইটি পদ এবং $a\leqslant b$ দেখাও যে, $a+bc=b(a+c)$.

উঃ $a+bc=(a+b)(a+c)$

এক্ষণে $a+b=b+a=b+b'a$ (উদাহরণ 2) $=b+ab'$

কিন্তু, যেহেতু $a\leqslant b$, $ab'=0$

$\therefore$ $a+b=b+0=b$.

$\therefore$ $a+bc=b(a+c)$

প্রশ্নমালা 4

1. কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার a ও b দুইটি পদ,
দেখাও $a+b=a+b+ab$.

2. a, b এবং x কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার তিনটি পদ এবং $a+x=b+x$; ও $a+x'=b+x'$. দেখাও $a=b$.

3. প্রমাণ কর যে, কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার তিনটি এবং তিনটি মাত্র পরস্পর ভিন্ন পদ থাকিতে পারে না।

4. প্রমাণ কর যে, a, b, c কোন বুলিয়ান্ এ্যাল্‌জেব্রার তিনটি পদ হইলে এবং $a+b=a+c$ ও $ab=ac$ হইলে $b=c$.

5. প্রমাণ কর a, b, c কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার তিনটি পদ হইলে $(a+b)(b+c)(c+a)=ab+bc+ca$.

6. $\{a, b, c, d\}$ বিন্যাসটির দুইটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া (+) ও (.) এইরূপ যে, প্রক্রিয়া দুইটি নিম্নের তালিকা দুইটি দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	b	b	d

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

দেখাও যে বিন্যাসটি একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

[তালিকাটি পড়িবার নিয়ম : মনে কর $c+b$ নির্ণয় করিবে। (+) তালিকায়, তৃতীয় সারি ও দ্বিতীয় স্তম্ভ যেখানে ছেদ করিয়াছে দেখ। দেখ উহারা bতে ছেদ করিয়াছে। $\therefore\ c+b=b$. অনুরূপে $cd=a$; (.) তালিকায় তৃতীয় সারি ও চতুর্থ স্তম্ভ aতে ছেদ করিয়াছে]

7. a, b, c একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার তিনটি পদ।

দেখাও যে,

(i) $a'b+b'c+c'a=ab'+bc'+ca'$

(ii) $(a+b')(b+c')(c+a')=(a'+b)(b'+c)(c'+a)$

8. a ও x একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার দুইটি পদ

এবং $a\leqslant x$, দেখাও যে,

$a+x=x$ এবং $ax=a$.

§ 6. বৈকল্পিক নরম্যাল আকার ও যৌগিক নরম্যাল আকার (Disjunctive Normal Form and Conjunctive Normal Form) :

বুলিয়ান্ রাশি (Boolean quantity) : 'a' যদি কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার পদ হয়, তবে 'a'কে একটি বুলিয়ান্ রাশি বলা হয়। বর্তমান অনুচ্ছেদের আলোচনায় সকল বুলিয়ান্ রাশি যে কোন নির্দিষ্ট বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার পদ।

বুলিয়ান্ ধ্রুবক (Boolean Constant): যে প্রতীকের কোন গাণিতিক আলোচনায় একাধিক মান থাকিতে পারে না তাহাকে একটি ধ্রুবক রাশি বলা হয়। যদি ঐ ধ্রুবক রাশিটির মান একটি বুলিয়ান্ রাশি হয়, তবে ঐ ধ্রুবক রাশিটি একটি বুলিয়ান্ ধ্রুবক রাশি।

বুলিয়ান্ চল (Boolean Variable) : যে প্রতীকের কোন গাণিতিক আলোচনায় একাধিক মান থাকিতে পারে, তাহাকে একটি চল রাশি বলে। ঐ চল রাশির সম্ভাব্য সকল মান যদি কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার পদ হয়, তবে ঐ চল রাশিকে একটি বুলিয়ান্ চল রাশি বলা হয়। x ও x'কে একই চলের দুইটি আকার বলা হয়।

অতঃপর বুলিয়ান্ রাশি, বুলিয়ান ধ্রুবক রাশি এবং বুলিয়ান্ চল রাশিকে যথাক্রমে রাশি, ধ্রুবক বা ধ্রুবক রাশি এবং চল বা চল রাশি বলা হইবে।

একপদ রাশি (monomial) : a একটি ধ্রুবক এবং P, n সংখ্যক ($n \geq 1$) চল রাশির গুণফল হইলে $a P$ আকারের রাশিকে একটি একপদ রাশি বলে।

বহুপদ রাশি (polynomial) : কয়েকটি একপদ রাশির যোগফলকে একটি বহুপদ রাশি বলা হয়। কোন বহুপদ রাশির প্রত্যেকটি একপদ রাশিকে ঐ বহুপদ রাশির পদ (term) বলা হয়।

x, ax_1x_2, $x_1x_2'x_3$ একপদ রাশি।

$x+ax_1x_2+x_1+x_2'x_3$ একটি বহুপদ রাশি।

বুলিয়ান্ অপেক্ষক (Boolean Function) : সসীম সংখ্যক কতকগুলি ধ্রুবক এবং চল রাশির (+), (.) এবং (') চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত আকারকে বুলিয়ান্ অপেক্ষক বলে। অতঃপর বুলিয়ান্ অপেক্ষককে অপেক্ষক বলা

হইবে। যে অপেক্ষকে একটি মাত্র চল থাকে তাহাকে একচল বিশিষ্ট অপেক্ষক (Function of a single variable) বলে। অনুরূপে দুই চলবিশিষ্ট অপেক্ষকে দুইটি মাত্র চল, তিন চলবিশিষ্ট অপেক্ষকে তিনটিমাত্র চল……, n চলবিশিষ্ট অপেক্ষকে n সংখ্যক চল থাকে।

x, x', $x+x'$, $a(x+x')$, $b(x+x')'+1$ এক চলবিশিষ্ট অপেক্ষক। $x+y'$, $(x+y)'+(xy)'+x+0$ দুই চল বিশিষ্ট অপেক্ষক।

বৈকল্পিক নরম্যাল আকার (Disjunctive Normal Form) : মনে কর $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots ; x_n$ এই n সংখ্যক চলবিশিষ্ট একটি অপেক্ষক f এবং $f_i(x_i) = x_i$ বা x_i' $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$, যদি f-কে $f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots\cdots f_n(x_n)$ আকারের কয়েকটি পরস্পর ভিন্ন রাশির যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায় তবে ঐ যোগফলকে f-এর **বৈকল্পিক নরম্যাল আকার Disjunctive Normal Form)** বলা হয়। 0 এবং 1-কে n সংখ্যক $(n \geqslant 0)$ চলের বৈকল্পিক নরম্যাল আকার বলা হয়।

যৌগিক নরম্যাল আকার (Conjunctive Normal Form) : মনে কর $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots, x_n$ এই n সংখ্যক চলবিশিষ্ট একটি অপেক্ষক f এবং $f_i(x_i) = x_i$ বা x_i' $(i=1,2\cdots\cdots,n)$; যদি $f(x)$-কে $f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots\cdots+f_n(x_n)$ আকারের কয়েকটি ভিন্ন রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায়, ঐ গুণফলকে f-এর **যৌগিক নরম্যাল আকার (Conjunctive Normal Form)** বলে। 0 এবং **1**, n সংখ্যক $(n \geqslant 0)$ চলের যৌগিক নরম্যাল আকার।

উপপাদ্য 1. যদি কোন n সংখ্যক চলবিশিষ্ট $(n>0)$ বুলিয়ান্ অপেক্ষকে কোন ধ্রুবক পদ না থাকে, তবে ঐ অপেক্ষকটিকে একটি বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ : মনে কর f, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ এই n সংখ্যক চলবিশিষ্ট একটি ধ্রুবক পদহীন অপেক্ষক $(n>0)$। প্রথমে দেখ, কোন পদে দুই বা ততোধিক চল $(a+b)'$, $(ab)'$, $(a+b+c)'$, $(abc)'$ ইত্যাদি আকারে আছে কিনা। ঐ সকল আকারকে ডিমরগ্যানের উপপাদ্যের সাহায্যে $a'b'$, $a'+b'$, $(a+b)'c'=a'b'c'$ $(ab)'+c'=a'+b'+c'$ ইত্যাদি আকারে পরিণত কর। অতঃপর (.) ও (+)-এর বিচ্ছেদ নিয়ম প্রয়োগ করিয়া f-কে একটি বহুপদ রাশিতে পরিণত কর।

এইবার দেখ ঐ বহুপদ রাশিটির কোন পদে কোন চল অনুপস্থিত কিনা। যদি কোন পদে কোন চল, মনে কর x_i অনুপস্থিত থাকে তবে ঐ পদটিকে (x_i+x_i') দ্বারা গুণকর এবং আবার (.) ও (+)-এর বিচ্ছেদ নিয়মটিকে প্রয়োগ কর। এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক পদে প্রত্যেক চলকে উপস্থিত কর। সর্বশেষ দেখ কোন পদ বহুপদ রাশিটিতে একাধিকবার উপস্থিত কিনা। যে সকল পদ একাধিকবার পাওয়া যাইবে তাহাদের একবার মাত্র লও; কারণ তোমরা জান $a+a=a$.

এখন যে বহুপদ রাশিটি পাওয়া গেল তাহাই f-এর বৈকল্পিক নরম্যাল আকার।

উদাহরণ। $x_1x_2'+(x_2+x_3)'(x_1+x_3)$-কে বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

$$x_1x_2'+(x_2+x_3)'(x_1+x_3)$$
$$=x_1x_2'+x_2'x_3'(x_1+x_3)$$
$$=x_1x_2'+x_2'x_3'x_1+x_2'x_3'x_3$$
$$=x_1x_2'(x_3+x_3')+x_2'x_3'x_1+x_2'.0$$
$$=x_1x_2'x_3+x_1x_2'x_3'+x_1x_2'x_3'+0$$
$$=x_1x_2'x_3+x_1x_2'x_3'$$

উপপাদ্য 2. যদি কোন n সংখ্যক চলবিশিষ্ট $(n>0)$ বুলিয়ান অপেক্ষকে কোন ধ্রুবকপদ না থাকে, তবে ঐ অপেক্ষকটিকে একটি যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ। মনে কর $f, x_1, x_2, \cdots, x_n$ এই n সংখ্যক চলবিশিষ্ট ধ্রুবক পদহীন একটি অপেক্ষক $(n>0)$ প্রথমে দেখ, কোন পদে দুই বা ততোধিক চল $(a+b)'$, $(ab)'$, $(a+b+c)'$, $(abc)'$ ইত্যাদি আকার আছে কিনা। ঐসকল আকারকে ডিমরগ্যানের উপপাদ্যের সাহায্যে $a'b'$, $a'+b'$, $(a+b)'c'=a'b'c'$, $(ab)'+c'=a'+b'+c'$ ইত্যাদি আকারে পরিণত কর। অতঃপর (+) ও (.)-এর বিচ্ছেদ নিয়ম প্রয়োগ করিয়া এবং প্রয়োজন হইলে যতবার প্রয়োজন ততবার ঐ বিচ্ছেদ নিয়মটি প্রয়োগ করিয়া f-কে একাধিক বহুপদ রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ কর। যতক্ষণ না প্রত্যেক বহুপদ রাশির প্রত্যেকটি পদে একটি মাত্র চল থাকে ততক্ষণ প্রত্যেক বহুপদ রাশিতে আবার পূর্বের বিচ্ছেদ

নিয়ম প্রয়োগ কর। এইবার দেখ, কোন উৎপাদকে কোন চল অনুপস্থিত কিনা। কোন উৎপাদকে কোন চল, মনে কর x_i অনুপস্থিত হইলে ঐ উৎপাদকে x_ix_i' যোগ কর এবং পূর্বের বিচ্ছেদ নিয়ম প্রয়োগ কর। এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক উৎপাদকে প্রত্যেক চলকে উপস্থিত কর। সর্বশেষ দেখ কোন উৎপাদক একাধিকবার উপস্থিত কিনা। যে সকল উৎপাদক একাধিকবার উপস্থিত তাহাদের একবার মাত্র লও; কারণ তোমরা জান $a.a=a$. এখন যে গুণফলটি পাওয়া গেল তাহাই f-এর যৌগিক নরম্যাল আকার।

উদাহরণ। $x_1x_2'+(x_2+x_3)'(x_1+x_3)$-কে যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

$$x_1x_2'+(x_2+x_3)'(x_1+x_3)$$

$$=x_1x_2'+x_2'x_3'(x_1+x_3)$$

$$=(x_1x_2'+x_2'x_3')(x_1x_2'+x_1+x_3)$$

$$=(x_1x_2'+x_2')(x_1x_2'+x_3')(x_1+x_3) \quad [\because \ x_1=x_1x_2'+x_1]$$

$$=x_2'(x_1+x_3')(x_2'+x_3')(x_1+x_3)$$

$$[\because \ x_2'+x_2'x_1=x_2'];$$

$$=(x_1x_1'+x_2')(x_1+x_2x_2'+x_3')(x_1x_1'+x_2'+x_3')(x_1+x_2x_2'+x_3')$$

$$=(x_1+x_2')(x_1'+x_2')(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3)(x_1+x_2'+x_3')(x_1'+x_2'+x_3')(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3')$$

$$=(x_1+x_2'+x_3x_3')(x_1'+x_2'+x_3x_3')(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3)(x_1+x_2'+x_3')(x_1'+x_2'+x_3')(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3')$$

$$=(x_1+x_2'+x_3)(x_1+x_2'+x_3')(x_1'+x_2'+x_3)(x_1'+x_2'+x_3')(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3)(x_1+x_2'+x_3')(x_1'+x_2'+x_3')(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3')$$

$$=(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3')(x_1+x_2'+x_3)(x_1+x_2'+x_3')(x_1'+x_2'+x_3)(x_1'+x_2'+x_3')$$

[যে সকল উৎপাদক দুইবার উপস্থিত তাহাদের মাত্র একবার করিয়া লইয়া এবং সাজাইয়া]

সম্পূর্ণ নরম্যাল আকার (Complete Normal Form) : $n(n \geqslant 1)$ সংখ্যক চলের কোন অপেক্ষকের বৈকল্পিক বা যৌগিক কোন নরম্যাল আকারে যথাক্রমে 2^n সংখ্যক পদ বা উৎপাদক থাকিলে, ঐ নরম্যাল আকারটিকে ঐ n সংখ্যক চলের সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকার (Complete Disjunctive Normal Form) বা সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকার (Complete Conjunctive Normal Form) বলে।

উপপাদ্য 3. যদি n সংখ্যক $(n>0)$ চলের প্রত্যেকটিকে যে-কোন নির্দিষ্ট প্রকারে 0 বা 1 মান দেওয়া যায়, তবে ঐ n সংখ্যক চলের সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের একটি এবং একটিমাত্র পদের মান হইবে 1 এবং অন্যান্য সকল পদের মান হইবে 0।

প্রমাণ। মনে কর, $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n সংখ্যক চল $(n \geqslant 1)$ এবং ইহাদের যথাক্রমে $a_1, a_2, \cdots, a_n$ মান প্রদত্ত হইল ($a_i = 0$ বা $1, i = 1, 2, \cdots n$). এখন ঐ n সংখ্যক চলের সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের একটি বিশেষ পদ নিম্নরূপে লও, যদি $a_i = 1$ হয়, তবে ঐ পদে x_i থাকিবে এবং যদি $a_i = 0$ হয়, তবে ঐ পদে x_i' থাকিবে।

সুতরাং এই বিশেষ পদটি n সংখ্যক 1এর গুণফল হিসাবে 1. সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের অন্যান্য পদের প্রত্যেকের অন্ততঃ একটি উৎপাদক 0 হওয়ায় প্রত্যেকে 0 হইবে। সুতরাং চলগুলির সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের একটি এবং একটিমাত্র পদের মান 1.

উপপাদ্য 4. যদি n সংখ্যক $(n \geqslant 0)$ চলের প্রত্যেকটিকে যে-কোন নির্দিষ্ট প্রকারে 0 বা 1 মান দেওয়া যায়, তবে ঐ n সংখ্যক চলের সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকারের একটি এবং একটিমাত্র উৎপাদকের মান হইবে 0 এবং অন্যান্য সকল উৎপাদকের মান হইবে 1.

প্রমাণ। উপপাদ্যটি উপপাদ্য 3-এর দ্বিত্ব। তাই প্রমাণ দেওয়া হইল না।

উপপাদ্য 5. যদি দুইটি অপেক্ষকের বৈকল্পিক নরম্যাল আকার দুইটি সমান হয় তবে অপেক্ষক দুইটি সমান। এবং বিপরীতক্রমে দুইটি অপেক্ষক সমান হইলে উহাদের বৈকল্পিক নরম্যাল আকার দুইটি সমান হইবে।

প্রমাণ। যেহেতু প্রত্যেক অপেক্ষক এবং তাহার বৈকল্পিক নরম্যাল আকার দুইটি সমান, সুতরাং অপেক্ষক দুইটি পরস্পর সমান।

বিপরীতক্রমে, যেহেতু অপেক্ষক দুইটি সমান, চলগুলির যে কোনও মানের জন্য উহাদের মান সমান হইবে। মনে করা যাক, উহাদের প্রত্যেককে যে-কোনও নির্দিষ্ট প্রকারে 0 অথবা 1 মান দেওয়া হইল। উপপাদ্য 3 অনুযায়ী উহাদের সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের একটি এবং **একটি**মাত্র বিশেষ পদের মান 1 হইবে। ঐ পদটি অপেক্ষক দুইটির বৈকল্পিক নরম্যাল আকার দুইটির উভয়েই উপস্থিত অথবা উভয়েই অনুপস্থিত থাকিবে। কারণ, নচেৎ, একটি আকারের মান 1 এবং অপরটির মান 0 হইবে অর্থাৎ চলগুলির ঐ নির্দিষ্ট মানগুলির জন্য অপেক্ষক দুইটির মান অসমান হইবে। সুতরাং চলগুলির সম্পূর্ণ নরম্যাল আকারের যে সকল পদ একটি অপেক্ষকের বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে উপস্থিত অথবা অনুপস্থিত থাকিবে, তাহারা অন্য অপেক্ষকটির বৈকল্পিক নরম্যাল আকারেও যথাক্রমে উপস্থিত অথবা অনুপস্থিত থাকিবে। সুতরাং অপেক্ষক দুইটির বৈকল্পিক নরম্যাল আকার দুইটি সমান।

অনুসিদ্ধান্ত। মনে কর n সংখ্যক $(n>0)$ চলের দুইটি বুলিয়ান্ অপেক্ষকের অভেদ প্রমাণ করিতে হইবে। সম্ভাব্য সকল ক্রমে চলগুলিকে 0 এবং 1 মান দাও। যদি প্রত্যেক ক্ষেত্রেই অপেক্ষক দুইটির মান সমান হয়, তবে অপেক্ষক দুইটি সমান।

উপপাদ্য 6. যদি দুইটি অপেক্ষকের যৌগিক নরম্যাল আকার দুইটি সমান হয়, তবে অপেক্ষক দুইটি সমান। বিপরীতক্রমে, দুইটি অপেক্ষক সমান হইলে, উহাদের যৌগিক নরম্যাল আকার দুইটি সমান।

প্রমাণ। উপপাদ্যটি উপপাদ্য 5এর দ্বিত্ব।

পূরক নির্ণয়। উপপাদ্য 3 ও 4 হইতে বুঝিতে পারিতেছ যে, যে কোন সংখ্যক চলের সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারও সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকারের মান যথাক্রমে 1 ও 0. সুতরাং কোন অপেক্ষকের বৈকল্পিক (বা যৌগিক) নরম্যাল আকার জানা থাকিলে অপেক্ষকটির পূরক হইবে অপেক্ষকে যে কয়টি চল আছে তাহাদের সম্পূর্ণ নরম্যাল আকারের যে পদ (বা উৎপাদক) গুলি ঐ বৈকল্পিক (বা যৌগিক) নরম্যাল আকারে অনুপস্থিত তাহাদের যোগফল (বা গুণফল)।

উদাহরণমালা 4

1. $(x+y+z)(xy+x'z)'$কে বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

$$
\begin{aligned}
&(x+y+z)(xy+x'z)'\\
&=(x+y+z)(xy)'(x'z)'\\
&=(x+y+z)(x'+y')(x+z')\\
&=(xy'+x'y+x'z+y'z)(x+z')\\
&=xy'+xy'z'+x'yz'+xy'z\\
&=xy'(z+z')+xy'z'+x'yz'+xy'z\\
&=xy'z+xy'z'+xy'z'+x'yz'+xy'z\\
&=xy'z+xy'z'+x'yz'
\end{aligned}
$$

2. $(xy'+xz')'+x'$কে যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

$$
\begin{aligned}
&(xy'+xz')'+x'\\
&=(xy')'(xz')'+x'\\
&=(x'+y)(x'+z)+x'\\
&=(x'+y+x')(x'+z+x')\\
&=(x'+y)(x'+z)\\
&=(x'+y+zz')(x'+z+yy')\\
&=(x'+y+z)(x'+y+z')(x'+z+y)(x'+z+y')\\
&=(x'+y+z)(x'+y+z')(x'+y'+z)
\end{aligned}
$$

3. $f(x, y, z)$ তিনটি চল x, y ও z-এর অপেক্ষক। নীচের তালিকায় x, y ও z-এর সম্ভাব্য সকল মান (1 ও 0)-এর জন্য $f(x, y, z)$ এর মান দেওয়া হইল। $f(x, y, z)$ এর বৈকল্পিক নরম্যাল আকারটি নির্ণয় কর।

সারি	x	y	z	$f(x, y, z)$
1.	1	1	1	0
2.	1	1	0	1
3.	1	0	1	0
4.	1	0	0	1
5.	0	1	1	0
6.	0	1	0	0
7.	0	0	1	0
8.	0	0	0	0

দেখ, সারি 2 এবং 4এ প্রদত্ত x, y ও zএর মানের জন্য $f(x, y, z)$, 1 হইবে এবং অন্য সারিগুলিতে প্রদত্ত x, y ও zএর মানের জন্য $f(x, y, z)$, 0 হইবে। সুতরাং $f(x, y, z)$এর বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে মাত্র দুইটি পদ থাকিবে। উপপাদ্য 3 অনুযায়ী, পদগুলি হইবে xyz' ও $xy'z'$ $\therefore$ নির্ণেয় বৈকল্পিক নরম্যাল আকার $xyz'+xy'z'$.

4. $f(x, y, z)$ তিনটি চল x, y ও z এর অপেক্ষক। নীচের তালিকায় x, y ও z এর সম্ভাব্য সকল মান (1 ও 0)এর জন্য $f(x, y, z)$এর মান দেওয়া হইল। $f(x, y, z)$এর যৌগিক নরম্যাল আকারটি নির্ণয় কর।

সারি	x	y	z	$f(x, y, z)$
1.	1	1	1	1
2.	1	1	0	0
3.	1	0	1	1
4.	1	0	0	0
5.	0	1	1	0
6.	0	1	0	0
7.	0	0	1	0
8.	0	0	0	0

দেখ, সারি 1 ও 3 ভিন্ন প্রত্যেক সারিতে x, y ও zএর প্রদত্ত মানের জন্য অপেক্ষকটির মান 0.

সুতরাং $f(x, y, z)$এর যৌগিক নরম্যাল আকারে ছয়টি উৎপাদক থাকিবে। যেহেতু প্রত্যেক সারির প্রদত্ত মানের জন্য এক একটি উৎপাদক 0 হইবে, অতএব উৎপাদকগুলি, $x'+y'+z$, $x'+y+z$, $x+y'+z'$, $x+y'+z$, $x+y+z'$, $x+y+z$.

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক নরম্যাল আকার : $(x'+y'+z(x'+y+z)$ $(x+y'+z')(x+y'+z)(x+y+z')(x+y+z)$

আবার এই আকারটিকে নিম্নরূপে সংক্ষিপ্ত আকারে লেখা যায়।

$$(x'+y'+z)(x'+y+z)(x+y'+z')(x+y'+z)(x+y+z')$$
$$\times(x+y+z)$$
$$=(x'+y'+z)(x'+y+z)(x+y+z')(x+y'+z')(x+y+z)$$
$$(x+y'+z)$$
$$=\{(x'+z)+yy'\}\{(x+z')+yy'\}\{(x+z)+yy'\}$$

[যোগ ও গুণের বিচ্ছেদ নিয়ম]

$$=(x'+z)(x+z')(x+z)$$

দেখ ইহা x ও z এই দুইটি অপেক্ষকের যৌগিক নরম্যাল আকার।

5. $xyz+x'yz+xy'z'+x'yz'$ এই বৈকল্পিক নরম্যাল আকারকে যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

$$xyz+x'yz+xy'z'+x'yz'$$
$$=[(xyz+x'yz+xy'z'+x'yz')']'$$
$$=[(x'+y'+z')(x+y'+z')(x'+y+z)(x+y'+z)]'$$
$$=(x+y+z)(x'+y+z')(x+y+z')(x'+y'+z)$$

এখানে প্রথম পূরকটি পাওয়া গিয়াছে ডিমরগ্যানের উপপাদ্য অনুসারে। দ্বিতীয় পূরকটি উপরে বর্ণিত নিরীক্ষা প্রণালীতে নির্ণয় করা হইয়াছে।

6. $(x'+y+z')(x'+y+z)(x+y'+z')(x+y'+z)$ এই যৌগিক নরম্যাল আকারকে বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

$$(x'+y+z')(x'+y+z)(x+y'+z')(x+y'+z)$$
$$=[\{(x'+y+z')(x'+y+z)(x+y'+z')(x+y'+z)\}]'$$
$$=[xy'z+xy'z'+x'yz+x'yz']'$$
$$=xyz'+xyz+x'y'z+x'y'z'$$

প্রশ্নমালা 5

1. নীচের অপেক্ষকগুলিকে ক্ষুদ্রতম সংখ্যক চলের বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে পরিণত কর।

(i) $x'+xy$ (ii) $xy'+xz+x'y$

(iii) $xyz+(x+y)(y+z)$

(iv) $(x'y+xyz'+xy'z+xyzt+t')'$

(v) $(x+y')(y+z')(z+x')(x'+y')$

(vi) $(x+y)(x'+y)(x+z')$

2 নীচের অপেক্ষকগুলিকে ক্ষুদ্রতম সংখ্যক চলের যৌগিক নরম্যাল আকারে পরিণত কর।

(i) $xy+xz'+x'y$ (ii) $(x+y+z)(xy+x'z)'$

(iii) $(xy'+xz')'+x$ (iv) $xyz+(x+y)(y+z)$

(v) $(x'y+xyz'+xy'z+x'y'z't'+t)$

(vi) $(x+y)(x'+y)(x+z')$

(vii) $x'yz+xy'z'+x'y'z+x'yz'$

3. দেখাও যে x, y ও zএর সম্পূর্ণ বৈকল্পিক নরম্যাল আকারের মান 1 ও সম্পূর্ণ যৌগিক নরম্যাল আকারের মান 0.

4. নীচের অপেক্ষকগুলি দুইটি চল বিশিষ্ট। উহাদের x, y ও z এই তিনটি চলের বৈকল্পিক ও যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

(i) $x'+y$ (ii) $x'y+xy'$ (iii) $(x+z)(x'+z')$

5. x, y ও z এই তিনটি চল বিশিষ্ট একটি অপেক্ষকের মান 0, যখন $x=y=1$ এবং $z=0$ বা যখন $x=z=1$ এবং $y=0$; চলগুলির অন্যান্য সকল মানের জন্য অপেক্ষকটির মান 1 অপেক্ষকটিকে বৈকল্পিক নরম্যাল আকার ও যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর।

6. নিরীক্ষার দ্বারা নীচের অপেক্ষকগুলির পূরক নির্ণয় কর :

(i) $xyz+x'y'z'$ (ii) $xy'z+xyz'+x'yz+x'y'z'$

(iii) $(x+y)(x'+y)$ (iv) $(x+y)(x+y')(x'+y')$

(v) $(x+y+z)(x'+y+z')(x'+y'+z)$

(vi) $(x'+y+z)(x+y'+z)(x+y+z)(x'+y'+z')$

7. নীচের বৈকল্পিক নরম্যাল আকারগুলিকে যৌগিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর :

(i) $xy+x'y'$ (ii) $xyz+xy'z'+x'yz'+x'y'z'$

(iii) $xyz+xy'z+xyz'+xy'z'$

8. নীচের যৌগিক নরম্যাল আকারগুলিকে বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে প্রকাশ কর :

(i) $(x+y')(x'+y)(x'+y')$

(ii) $(x+y+z)(x+y'+z)(x+y+z')(x+y'+z')$

9. f_1 ও f_2 x, y ও z এই তিনটি চল বিশিষ্ট এবং f_3 x, y, z ও t এই চারটি চলবিশিষ্ট তিনটি অপেক্ষক। নীচের তালিকায় x, y, z এবং t এর সম্ভাব্য সকল মান (1 ও 0) এর জন্য f_1, f_2 ও f_3 এর মান দেওয়া হইল। অপেক্ষক তিনটির উভয় নরম্যাল আকার নির্ণয় কর। t এর মানগুলি কেবল মাত্র f_3 এর জন্য প্রযোজ্য এবং যুগ্ম সংখ্যক সারির x, y ও zএর মানগুলি f_1 ও f_2 এর জন্য প্রযোজ্য নহে।

সারি	x	y	z	t	f_1	f_2	f_3
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	0	—	—	1
3	1	1	0	1	0	1	0
4	1	1	0	0	—	—	0
5	1	0	1	1	1	0	1
6	1	0	1	0	—	—	1
7	1	0	0	1	0	0	1
8	1	0	0	0	—	—	0
9	0	1	1	1	1	1	0
10	0	1	1	0	—	—	0
11	0	1	0	1	0	0	1
12	0	1	0	0	—	—	0
13	0	0	1	1	1	1	1
14	0	0	1	0	—	—	0
15	0	0	0	1	0	0	0
16	0	0	0	0	—	—	1

§7. **বুলিয়ান্ অপেক্ষকের সরলীকরণ (Simplification of Boolean Functions)**: পঞ্চম অনুচ্ছেদে বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার বিভিন্ন ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। নীচে তাহাদের একটি তালিকা দেওয়া হইল। এই সকল ধর্মের সাহায্যে বিভিন্ন জটিল বুলিয়ান্ অপেক্ষককে সরলতর আকারে পরিণত করা যায়। উদাহরণমালা 5এ বিভিন্ন বুলিয়ান্ অপেক্ষকের সরলীকরণ পদ্ধতির উদাহরণ দেওয়া হইল।

তালিকা:

a, b, c কোন বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার যে কোন তিনটি পদ এবং 0 এবং 1 যথাক্রমে ঐ বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার (+) এবং (.) প্রক্রিয়া দুইটির একক পদ। a', aএর পূরক পদ।

1. $a+b=b+a$; $ab=ba$. (সাধারণতঃ $a.b$কে abলেখা হয়)
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a(bc)=(ab)c$.
3. $a(b+c)=ab+ac$; $a+bc=(a+b)(a+c)$
4. $a+0=a$; $a.1=a$,
5. $a+a=a$; $a.a=a$;
6. $a+ab=a$; $a(a+b)=a$;
7. $a+1=1$; $a.0=0$;
8. $(a')'=a$;
9. $0'=1$; $1'=0$;
10. $a+a'=1$; $a.a'=0$;
11. $(a+b)'=a'b'$; $(ab)'=a'+b'$;

উদাহরণমালা 5

সরল কর:

1. $a(a'+b)+b(b+c)+b$

$$\begin{aligned}&a(a'+b)+b(b+c)+b\\ &=aa'+ab+b+b\\ &=0+ba+b\\ &=ba+b\\ &=b+ba\\ &=b.\end{aligned}$$

2. $ac'+abc+ac$

$$
\begin{aligned}
&ac'+abc+ac\\
&=ac'+ac+abc\\
&=a(c'+c)+abc\\
&=a.1+abc\\
&=a+abc\\
&=a.
\end{aligned}
$$

3. $(a+ab+abc)(a+b+c)$

$$
\begin{aligned}
&(a+ab+abc)(a+b+c)\\
&=(a+abc)(a+b+c)\\
&=a(a+b+c)\\
&=a.
\end{aligned}
$$

4. $(ab'+a'b)'(ab+a'b')'$

$$
\begin{aligned}
&(ab'+a'b)'(ab+a'b')'\\
&=(ab')'(a'b)'(ab+a'b')'\\
&=\{a'+(b')'\}\{(a')'+b'\}(ab+a'b')'\\
&=(a'+b)(a+b')(ab+a'b')'\\
&=(a'a+a'b'+ba+bb')(ab+a'b')'\\
&=(ab+a'b')(ab+a'b')' \quad [\because\ a'a=bb'=0 \text{ এবং } ba=ab\ ]\\
&=0.
\end{aligned}
$$

5. $a'c+b'c+abcd'$

$$
\begin{aligned}
&a'c+b'c+abcd'\\
&=(a'+b')c+abd'c\\
&=(a'+b'+abd')c\\
&=c(a'+b'+abd')\\
&=c\{(ab)'+abd'\} \quad [\because\ a'+b'=(ab)']\\
&=c\{(ab)'+d'\} \quad [\text{ উদাহরণ 2, উদাহরণমালা 3 (§5) দেখ }]\\
&=c(a'+b'+d')' \quad [\because\ a'+b'=(ab)']
\end{aligned}
$$

6. $(ab+ab'+a'b)(a+b+c+a'b'c')$

$$
\begin{aligned}
&(ab+ab'+a'b)(a+b+c+a'b'c')\\
&=\{a(b+b')+a'b\}'a+b+c+a'b'c')\\
&=(a.1+a'b)(a+b+c+a'b'c')\\
&=(a+a'b)(a+b+c+a'b'c')\\
&=(a+b)(a+b+c+a'b'c')\\
&=a+b
\end{aligned}
$$

[মনে কর $a+b=p$; $c+a'b'c'=q$;

$\therefore \quad (a+b)(a+b+c+a'b'c')=p(p+q)=p=a+b.$]

7. $abc+a'bc+ab'c+a'b'c$

$$
\begin{aligned}
&abc+a'bc+ab'c+a'b'c\\
&=(a+a')bc+(a+a')b'c\\
&=1.bc+1.b'c\\
&=bc+b'c\\
&=(b+b')c\\
&=1c.\\
&=c.
\end{aligned}
$$

8. $abc+ab(dc+ef)$

$$
\begin{aligned}
&abc+ab(dc+ef)\\
&=abc+ab(cd+ef)\\
&=abc+abcd+abef\\
&=abc+abef\\
&=ab(c+ef)
\end{aligned}
$$

9. $(abc+cd)(de+a'+b'+c)$

$$
\begin{aligned}
&(abc+cd)(de+a'+b'+c)\\
&=abcde+abca'+abcb'+abc.c+cdd+cda'+cdb'+cdc\\
&=abcde+aa'bc+acbb'+abc+cde+cda'+cdb+ccd\\
&=abcde+0'bc+ac.0+ab.c+cde+cda'+cdb'+cd\\
&=abcde+abc+cde+cda+cdb'+cd\\
&=abc+cd \qquad [\because \quad a+ab=a]\\
&=c(ab+d)
\end{aligned}
$$

প্রশ্নমালা 6

সরল কর : (a, b, c, d, e একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার পদ) :—

1. $a+a'b$
2. $ab+ab'+a'b+a'b'$
3. $abc+a'+b'+c'$
4. $(a+b)(a'+b)$
5. $abc+abc'+ab'c+a'bc+ab'c'+a'bc'+a'b'c+a'b'c$
6. $c'(ab+a'b')(a'+b+c')$
7. $a'[b'(a+c')+d']$
8. $(abc+de)(de+a'+b'+c')$
9. $(ab+ab'+a'b')'$
10. $(a+b'+c)(ab+a'c')'$
11. $(ab+ab'+a'b)'(a'b'+cd)$
12. $(a'bc')'(ab'c')$
13. $abc+ab'c+c'abc$
14. $abc(a+ab+abc)$
15. $abc(a+ab'+abc')$
16. $abcd(a+ab+abc+abcd)$
17. $abc+a'bc+ab'c+abc'$
18. $(a+b+cd)b'+(ac')b+(b'c)a$
19. $(ab+cde)(ab+c'+d'+e')$
20. $(ab+a'b'+ab')'[(a'+b')(a+b')]'$

তৃতীয় অধ্যায়

প্রতীক ও বচন (Symbols and Propositions)

§8. চিহ্ন, প্রতীক ও বাক্য (Sign, Symbol and Sentence)

চিহ্ন (Sign) : যাহা অন্যকিছুর অবস্থান, অস্তিত্ব বা লক্ষণ ইত্যাদি নির্দেশ করে বা দ্যোতনা করে বা যাহা অন্য কিছুর পরিবর্তে বসে তাহাকে **চিহ্ন** বলে।

তাই, ধূম অগ্নির চিহ্ন, বজ্রের চিহ্ন বিদ্যুৎ, নেতাজীর ছবি নেতাজীকে নির্দেশ করে, উত্তরপত্র পরীক্ষাকালে পরীক্ষক যে '√' চিহ্ন দেন, তাহা শুদ্ধের নির্দেশক। 105, একশত পাঁচ সংখ্যার পরিবর্তে বসে। মনে রাখিবে কোন চিহ্ন এবং উহা যাহার চিহ্ন তাহারা সাধারণতঃ পৃথক্। একজন মানুষ কথা বলিতে পারে, ভালবাসিতে পারে, যুক্তি দিতে পারে, কিন্তু 'মানুষ' শব্দটি কিছুই পারে না।

চিহ্ন অন্ততঃ তিন প্রকারের হয়। (1) সাদৃশ্যগত চিহ্ন, (2) নির্দেশক চিহ্ন, (3) প্রথাগত চিহ্ন।

(1) **সাদৃশ্যগত চিহ্ন (Iconic sign) :** ছবি, ফটো, মূর্তি ইত্যাদি সাদৃশ্যগত চিহ্ন। নেতাজীর ছবি নেতাজীর চিহ্ন বা গান্ধীজীর ফটো গান্ধীজীর চিহ্ন ; কারণ নেতাজীর ছবির সহিত নেতাজীর, গান্ধীজীর ফটোর সহিত গান্ধীজীর সাদৃশ্য আছে।

(2) **নির্দেশক চিহ্ন (Indexical Sign) :** পারস্পরিক ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধহেতু কোন বস্তু অপর কোন বস্তুর চিহ্ন হইতে পারে। দুই বা ততোধিক বস্তু বা ঘটনার একই সঙ্গে অবস্থান বা উৎপত্তির অভিজ্ঞতা হইতে উহাদের একটিকে অপরটির চিহ্নরূপে ধরা হয়। এই সকল চিহ্নকে নির্দেশক চিহ্ন বলা হয়। ধূম অগ্নির নির্দেশক চিহ্ন ; বিদ্যুৎ বজ্রপাতের নির্দেশক চিহ্ন।

(3) **প্রথাগত চিহ্ন (Conventional sign) :** কোন কিছু অন্য কোন বস্তু বা ঘটনার সহিত বিন্দুমাত্র সাদৃশ্য না থাকিলেও বা কোন প্রকার ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ না থাকিলেও ঐ বস্তু বা ঘটনার চিহ্নরূপে প্রযুক্ত হইতে পারে। ইহা সাধারণতঃ প্রথাগতভাবে হয়। এই প্রকার চিহ্নকে প্রথাগত চিহ্ন বলে।

প্রতীক (Symbol) : প্রতীক শব্দটি নানাবিধ অর্থে ব্যবহৃত হয়। গণিতে আমরা নিম্নের অর্থটি গ্রহণ করিব।

প্রথাগতভাবে অর্থবহ লিখিত চিহ্নকে **প্রতীক** বলে।

উদাহরণ 1. "যদি বৃষ্টি হয় তবে আমি বাড়ি যাইব না"। এই বাক্যে "বৃষ্টি হয়"কে p এই প্রতীক 'আমি বাড়ি যাইব না"কে q প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করিলে উপরের বাক্যটিকে সংক্ষেপে "যদি p তবে q" আকারে লেখা যায়। দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ, উহাদের প্রত্যেকের বর্গের সমষ্টির সহিত উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ যোগ করিলে পাওয়া যায়" বাক্যটিকে প্রতীকের সাহায্যে লেখা হয় $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$. "পাঁচ হাজার নয়শত তেষট্টি সংখ্যাটি"কে প্রতীকের সাহায্যে লেখা হয় "5963".

সিম্বলিক লজিক (Symbolic Logic) : গণিতের একটি প্রধান ভিত্তি যুক্তি। যুক্তির মাধ্যম ভাষা এবং যুক্তির পদ্ধতি **"যুক্তিশাস্ত্র"** বা **"লজিক"**। আমাদের যুক্তিশাস্ত্র বা লজিকে আমরা প্রতীক বা (symbol) ব্যবহার করিব তাই আমাদের যুক্তিশাস্ত্রের নাম **সিম্বলিক লজিক** বা **Symbolic Logic**.

চল প্রতীক ও ধ্রুবক প্রতীক (Variable symbol and Constant symbol) : কোন বিশেষ গাণিতিক আলোচনায় যে প্রতীক একাধিক বস্তুর পরিবর্তে ব্যবহৃত হইতে পারে তাহাকে **চল প্রতীক** এবং যে প্রতীক একটি বস্তুর পরিবর্তে ব্যবহৃত হইতে পারে তাহাকে **ধ্রুবক প্রতীক** বলে। চল ও ধ্রুবক ব্যতীত গণিতে আমরা অন্য এক প্রকার প্রতীক ব্যবহার করি। ইহাদের বলা হয় **সহায়ক প্রতীক (Auxiliary symbol).** $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ সূত্রে x একটি চল প্রতীক ; 2, 3, 5, 6 +, = সূচকের 2 ইহারা ধ্রুবক প্রতীক এবং বন্ধনী '( )' সহায়ক প্রতীক। পরবর্তী আলোচনায় আমরা 'প্রতীক" অংশটুকু বাদ দিয়া অনেক সময়ই শুধু "চল" ও "ধ্রুবক" শব্দ দুইটি ব্যবহার করিব।

বাক্য (Sentence) ভাষায় ব্যবহৃত বাক্যের দুইটি অংশ। উদ্দেশ্য (Subject) এবং বিধেয় (Predicate). উদ্দেশ্য একটি বস্তু 'x' যাহার সম্বন্ধে কিছু বলা হয় ; 'x' সম্বন্ধে যাহা বলা হয় তাহা বিধেয়। 'x' সম্বন্ধে কোন বাক্যকে $s(x)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। যথা,

$s(x)$: $\frac{\text{রাম}}{x}$ ভাল ছেলে।

ব্যাকরণগতভাবে বাক্য পাঁচ প্রকারের। যথা :

1. বিবৃতিবোধক বাক্য (Assertive or Declarative Sentence).
   উদাহরণ : রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর একজন কবি।
2. প্রশ্নবোধক বাক্য (Interrogative Sentence).
   উদাহরণ : গণিত কি একটি সহজ বিষয় ?
3. আকাঙ্ক্ষাবোধক বাক্য (Optative Sentence).
   উদাহরণ : নেতাজীর জয় হোক।
4. অনুজ্ঞাবোধক বাক্য (Imperative Sentence).
   উদাহরণ : পরীক্ষায় ভাল ফল করিবার চেষ্টা কর।
5. বিস্ময়বোধক বাক্য (Exclamatory Sentence).
   উদাহরণ : কি সুন্দর দৃশ্য !

গণিতে আমরা কেবলমাত্র বিবৃতিবোধক বাক্য লইয়া আলোচনা করিব অর্থাৎ গাণিতিক বাক্য বলিতে বিবৃতিবোধক বাক্যই বোঝাইবে।

§9. **বচন (Proposition)** : নীচের বাক্য দুইটি ভাল করিয়া লক্ষ্য কর :

1. হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক।
2. হাবিব একজন ভাল খেলোয়াড়।

উপরের বাক্য দুইটি বিবৃতিবোধক বাক্য ; সুতরাং উহারা গাণিতিক বাক্য। প্রথম বাক্যটির বিবৃতিকে কেহ কেহ সঠিক মনে করিতে পারেন। অর্থাৎ যাঁহারা হেমন্ত মুখোপাধ্যায়কে সুগায়ক মনে করেন তাঁহারা বিবৃতিটিকে সঠিক বা সত্য মনে করিবেন। আবার অনেকে বিবৃতিটিকে সঠিক মনে না করিতে পারেন, তাঁহাদের নিকট বিবৃতিটি অসত্য। দ্বিতীয় বাক্যটি সম্বন্ধেও একই কথা বলা যায়। গণিত কিন্তু ব্যক্তির মতামতের উপর নির্ভরশীল নহে। গাণিতিক দৃষ্টি কোণ হইতে প্রত্যেক বিবৃতির দুইটি সম্ভাবনা, সত্য (True) এবং অসত্য (False). এখন প্রশ্ন উঠিতে পারে সত্য বা অসত্য কাহাকে বলে ? আমরা এখানে সত্য বা অসত্যর কোন সংজ্ঞা নির্ধারণ করিব না। সত্য এবং অসত্য বলিতে কোন বিবৃতির দুইটি সম্ভাবনাকে বুঝিবে। মনে রাখিবে, কোন বিবৃতি সত্য এবং অসত্য উভয়ই একই সঙ্গে হইতে পারে না। কোন বিবৃতির সম্ভাব্য **সত্যমান (Truth Value)** দুইটি '**সত্য** এবং '**অসত্য**'। "কোন

বিবৃতিবোধক বাক্যের স্পষ্ট **বিবৃতি**, যাহার সত্য এবং অসত্য (কিন্তু উভয়ই নহে) সম্ভাবনা বা মান থাকে, তাহাকে বচন (Proposition) বলে। বচন সম্বন্ধে উপরে যাহা বলা হইল তাহাকে বচনের গাণিতিক সংজ্ঞা বলা যায় না। বচন সম্বন্ধে উপরোক্ত **ধারণা** লইয়াই আমরা পরবর্ত্তী আলোচনা করিতেছি।

তোমরা এখন নিশ্চয় বুঝিতে পারিতেছ যে উপরের বাক্য দুইটি বচনের উদাহরণ। নীচে আরও কয়েকটি বচনের উদাহরণ দেওয়া হইল :—

সূর্য পূর্বদিকে উদিত হয়।

ভারতীয়রা শান্তিপ্রিয়।

জওহরলাল একজন রাজনীতিক এবং রবীন্দ্রনাথ একজন কবি।

পুস্তকটির প্রচ্ছদ লাল অথবা উহা একটি গণিত গ্রন্থ।

যদি রাজ্যে সুশাসন থাকে তবে প্রজারা সুখী হয়।

p, q, r ইত্যাদি ইংরাজি ছোট হরফের অক্ষর সাধারণতঃ বচনের প্রতীক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।

যে বাক্যের একটিমাত্র উদ্দেশ্য এবং একটিমাত্র বিধেয় তাহার বিবৃতি একটি মৌলিক বচন (Simple Proposition). "হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক", "ভারতীয়রা শান্তিপ্রিয়" দুইটি মৌলিক বচনের উদাহরণ।

দুইটি মৌলিক বচনকে সংযুক্ত করিয়া অন্য একটি বচন পাওয়া যাইতে পারে। "এবং" (and) ও "অথবা" (or) এই শব্দ দুইটি দ্বারা অনেক সময় দুইটি বচনকে সংযুক্ত করা হয়। "এবং" ও "অথবা"কে **সংযোজক (connective)** বলে। যখন দুইটি বচন "এবং" দ্বারা সংযুক্ত হয়, তখন সংযুক্ত বচনটিকে একটি যৌগিক বচন (Conjunctive Proposition) বলে। "অথবা"* দ্বারা সংযুক্ত দুইটি বচনকে বৈকল্পিক বচন (Disjunctive Proposition) বলে। "হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক এবং হাবিব একজন ভাল খেলোয়াড়" বচনটি একটি যৌগিক বচন।

"হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক অথবা হাবিব একজন ভাল খেলোয়াড়" বচনটি একটি বৈকল্পিক বচন। "এবং"-এর পরিবর্তে সাধারণতঃ

---

* p অথবা q বলিতে আমরা p অথবা q অথবা উভয়ই বুঝিব।

$\therefore$ p সত্য হইলে $p+q$ সত্য ; q সত্য হইলে $p+q$ সত্য এবং p ও q উভয়ে সত্য হইলেও $p+q$ সত্য।

$\wedge$ বা (.) প্রতীক, "অথবা" এর পরিবর্তে $\vee$ বা (+) প্রতীক ব্যবহার করা হয়। এই পুস্তকে আমরা (.) ও (+) প্রতীক দুইটি ব্যবহার করিব।

মনে কর, "হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক" বচনটিকে p প্রতীক এবং "হাবিব একজন ভাল খেলোয়াড়" বচনটিকে q প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। সুতরাং উপরের যৌগিক বচনটি $p.q$ এবং বৈকল্পিক বচনটি $p+q$, অতঃপর $p.q$কে pq লেখা হইবে।

নঞর্থক বচন (negation of a proposition): "হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক" এই বচনটির সত্যমান যদি "সত্য" হয় তবে "হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক নহেন" বচনটির সত্যমান হইবে "অসত্য"। উপরের বচন দুইটিকে পরস্পরের নঞর্থক বচন বলে। কোন বচনের সত্যমান "সত্য" বা "অসত্য" হইলে উহার নঞর্থক বচনের সত্যমান হইবে যথাক্রমে "অসত্য" বা "সত্য"। "হেমন্ত মুখোপাধ্যায় একজন সুগায়ক" বচনটিকে "p" দ্বারা চিহ্নিত করিলে উহার নঞর্থক বচনটিকে $\sim p$ বা p' দ্বারা চিহ্নিত করা হইবে। অর্থাৎ কোন বচন p হইলে $\sim p$ বা p' উহার নঞর্থক বচন। আমরা এই পুস্তকে (´) প্রতীকটি ব্যবহার করিব। সুতরাং p ও p' পরস্পরের নঞর্থক বচন। $\therefore\ (p')'=p.$ (') প্রতীকটি আমাদের তৃতীয় সংযোজক।

উপরে আমরা দুইটি মৌলিক বচনের সংযুক্তি বিষয়ে আলোচনা করিয়াছি। অনুরূপে ততোধিক মৌলিক বচনকে অথবা দুই বা ততোধিক যৌগিক বা বৈকল্পিক বচনকে সংযোজক তিনটি দ্বারা সংযুক্ত করিয়া জটিলতর বচন পাওয়া যাইতে পারে। যথা:

$pq+r,\ p'.q+r,\ (p'+r)q,\ pq+qr+pr$ ইত্যাদি।

উদাহরণমালা 6

1. নীচের বাক্যগুলির কোন্‌গুলি বচন ?

(a) নাস্তিকেরা দুঃখ পায়।

(b) কি দুঃখজনক পরিস্থিতি!

(c) সূর্য পূর্বদিকে উদিত হয় এবং পশ্চিমদিকে অস্ত যায়।

(d) সামান্তরিক কাহাকে বলে ?

(e) কর্তব্যকর্ম করিয়া যাও।

উঃ (a) ও (c) বাক্য দুইটি বচন। কারণ, উহারা বিবৃতিবোধক বাক্য এবং উহাদের সম্বন্ধে সত্য বা অসত্য বলা যায়।

(b), (d) ও (e) বাক্য তিনটি বচন নহে। কারণ, উহারা বিবৃতিবোধক বাক্য নহে।

2. নীচের যৌগিক বা বৈকল্পিক বচনগুলির মৌলিক বচনগুলি নির্ণয় কর। যে বচনগুলির যৌগিক বা বৈকল্পিক আকার নাই, তাহাদিগকে সম্ভব হইলে যৌগিক বা বৈকল্পিক আকারে লিখ।

(a) পরিশ্রম করিলে সুখী হওয়া যায় এবং অলস ব্যক্তি কখনও উন্নতি করিতে পারে না।

(b) আজ খুব গরম পড়িয়াছে কিন্তু ঘাম হইতেছে না।

(c) জওহরলাল একজন রাজনীতিক হইলেও একজন কবি।

(d) এই পুস্তকের লেখক বঙ্কিমচন্দ্র অথবা শরৎচন্দ্র।

উঃ (a) (i) পরিশ্রম করিলে সুখী হওয়া যায়; (ii) অলস ব্যক্তি কখনও উন্নতি করিতে পারে না;

(b) বাক্যটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়: আজ খুব গরম পড়িয়াছে এবং ঘাম হইতেছে না। সুতরাং নির্ণেয় মৌলিক বাক্য হইতেছে:

(i) আজ খুব গরম পড়িয়াছে, (ii) ঘাম হইতেছে না।

(c) বাক্যটিকে নিম্নরূপে লেখা যায়: জওহরলাল একজন রাজনীতিক এবং জওহরলাল একজন কবি। সুতরাং নির্ণেয় মৌলিক বাক্য:

(i) জওহরলাল একজন রাজনীতিক (ii) জওহরলাল একজন কবি।

(d) বাক্যটি "এই পুস্তকের লেখক বঙ্কিমচন্দ্র অথবা এই পুস্তকের লেখক শরৎচন্দ্র" আকারে লেখা যায়। মৌলিক বাক্য দুইটি:

(i) এই পুস্তকের লেখক বঙ্কিমচন্দ্র (ii) এই পুস্তকের লেখক শরৎচন্দ্র।

3. নীচের বচনগুলির নঞর্থক বচনগুলি নির্ণয় কর:

(a) নাস্তিকেরা দুঃখ পায় (b) রাম পরীক্ষায় কৃতকার্য্য হয় নাই।

উঃ (a) নঞর্থক বচনটি দুইপ্রকারে লেখা যায়।

(i) নাস্তিকেরা দুঃখ পায় না (ii) নাস্তিকেরা সুখী হয়।

(*b*) নঞর্থক বচনটি দুইপ্রকারে লেখা যায়।

(i) রাম পরীক্ষায় কৃতকার্য হইয়াছে (ii) রাম পরীক্ষায় অকৃতকার্য হয় নাই।

4. মনে কর, "তিনি একজন সাধু" ও "রমেশ বুদ্ধিহীন" বচন দুইটিকে যথাক্রমে p ও q দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। নিম্নের সংযুক্ত বচনগুলিকে ভাষায় লিখ।

(*a*) pq (*b*) $p'+q$ (*c*) $p+q'$ (*d*) $(p'q)+(pq')$

উঃ (*a*) $pq=$"তিনি একজন সাধু এবং রমেশ বুদ্ধিহীন"

(*b*) $p'+q=$"তিনি একজন অসাধু অথবা রমেশ বুদ্ধিহীন"

(*c*) $p+q'=$"তিনি একজন সাধু অথবা রমেশ বুদ্ধিমান"

(*d*) $(p'q)+(pq')=$"তিনি একজন অসাধু এবং রমেশ বুদ্ধিহীন' অথবা 'তিনি একজন সাধু এবং রমেশ বুদ্ধিমান'।"

5. যদি "ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ" বচনটিকে p এবং "AB সরলরেখা CD সরলরেখার উপর লম্ব" বচনটিকে q দ্বারা চিহ্নিত করা হয় তবে নিম্নের সংযুক্ত বচনগুলিকে প্রতীকের আকারে লিখ।

(*a*) "ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অথবা AB সরলরেখা CD সরলরেখার উপর লম্ব।"

(*b*) "ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ এবং AB সরলরেখা CD সরলরেখার-উপর লম্ব নয়।"

(*c*) "ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ নয় অথবা AB সরলরেখা CD সরলরেখার উপর লম্ব নয়।"

উঃ (*a*) $p+q.$ (*b*) $p.q.'$ (*c*) $p'+q.$

প্রশ্নমালা 7

1. নীচের বাক্যগুলির কোন্‌গুলি বচন?

   (*a*) সামান্তরিক কাহাকে বলে?

   (*b*) সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল।

   (*c*) একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর।

(d) প্রত্যেক আয়তক্ষেত্র একটি সামান্তরিক।

(e) কি অপরিষ্কার চিত্র !

(f) সামান্তরিক ও আয়তক্ষেত্রের পার্থক্য কি ?

2. নীচের যৌগিক বা বৈকল্পিক বচনগুলির মৌলিক বচনগুলি নির্ণয় কর। (যে বচনগুলির যৌগিক বা বৈকল্পিক আকার নাই তাহাদের সম্ভব হইলে যৌগিক বা বৈকল্পিক আকারে লিখ।)

(a) তানসেন সুগায়ক ছিলেন কিন্তু রাজনীতি বুঝিতেন না।

(b) রবীন্দ্রনাথ একজন কবি এবং দার্শনিক।

(c) আমি ফুটবল খেলা ভালবাসি কিন্তু টেনিস খেলা ভালবাসি না।

(d) আমি আজ ফুটবল খেলা দেখিতে যাইব অথবা গান শুনিতে যাইব।

(e) রাম ইংরাজি অথবা গণিতে প্রথম স্থান অধিকার করিয়াছে।

3. নীচের বচনগুলির নঞর্থক বচন নির্ণয় কর।

(a) আজ বৃষ্টি পড়িবে।

(b) মোহনবাগান, ইস্টবেঙ্গলের কাছে হারিবে না।

(c) অলস ব্যক্তি জীবনে উন্নতি করিতে পারে না।

4. মনে কর, "রাম মিত্র ইন্‌স্টিট্যুসনের ছাত্র" এবং "রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হয় নাই" বচন দুইটিকে p ও q দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। নীচের বচনগুলিকে ভাষায় লিখ।

(a) $p+q$, (b) pq, (c) pq', (d) $p'+q'$, (e) $p'+q$
(f) $pq'+p'q$.

5. মনে কর, "সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান" বচনটি p এবং রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়" বচনটি q. নীচের বচনগুলিকে প্রতীকের সাহায্যে লিখ।

(a) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান এবং রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

(b) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান নয়।

(c) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান অথবা রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয় না।

§10. **সত্যতালিকা (Truth Table) :** পূর্ব অনুচ্ছেদে আমরা বচনের সত্যমান সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। 'সত্য এবং 'অসত্য' এই দুইটি সত্যমানকে '1' এবং '0' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। এইবার দুইটি মৌলিক বচনকে সংযুক্ত করিয়া যে সকল বচন পাওয়া যায় তাহাদের সত্যমান সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

প্রথমেই $p.q$ অর্থাৎ p এবং q এই যৌগিক বচনটি ধরা যাক। p ও qএর সম্ভাব্য সকল সত্যমানের জন্য $p.q$-এর সত্যমান কি হইতে পারে নীচে তাহা দেখান হইল।

যদি p সত্য এবং q সত্য হয়, তবে pq সত্য।

যদি p সত্য এবং q অসত্য হয়, তবে pq অসত্য।

যদি p অসত্য এবং q সত্য হয়, তবে pq অসত্য।

যদি p অসত্য এবং q অসত্য হয়, তবে pq অসত্য।

[p সত্য বলিতে p-এর সত্যমান 'সত্য' বা 1 বুঝিবে] i

উপরের আলোচনাকে নীচের তালিকাদ্বারা প্রকাশ করা যায়।

p	q	pq
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

তালিকা 1

উপরের তালিকাকে **সত্য তালিকা** (**Truth Table**) বলে। যে তালিকা হইতে দুই বা ততোধিক বচনের সম্ভাব্য সকল সত্য মানের জন্য উহাদের যৌগিক বা বৈকল্পিক বা অন্য কোন সংযুক্ত বচনের সকল সত্যমান পাওয়া যায় তাহাকে **সত্য তালিকা** বা **Truth Table** বলা হয়।

কোন বচন p এবং উহার নঞর্থক বচন p'-এর পারস্পরিক সম্পর্ক নীচের তালিকায় দেখান হইয়াছে।

p	p'
1	0
0	1

তালিকা 2

এইবার p ও q দুইটি বচনের বিভিন্ন সত্যমানের জন্য $p+q$ বচনটির সম্ভাব্য সকল সত্যমান সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

যদি p সত্য এবং q সত্য হয়, তবে $p+q$ সত্য।

যদি p সত্য এবং q অসত্য হয়, তবে $p+q$ সত্য।

যদি p অসত্য এবং q সত্য হয়, তবে $p+q$ সত্য।

যদি p অসত্য এবং q অসত্য হয়, তবে $p+q$ অসত্য।

সুতরাং $p+q$-এর সত্য তালিকাটি নিম্নরূপ :

p	q	p+q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

তালিকা 3

নীচে আরও কয়েকটি প্রয়োজনীয় বচনের সত্য তালিকা দেওয়া হইল।

p p ও p + p-এর সত্য তালিকা

p	p p	p + p
1	1	1
0	0	0

তালিকা 4

p(q+r) এবং pq+pr-এর সত্য তালিকা

p	q	r	q+r	p(q+r)	pq	pr	pq+pr
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

তালিকা 5

$(p+q)(p+r)$ ও $p+qr$ এর সত্য তালিকা

p	q	r	$p+q$	$p+r$	qr	$(p+q)(p+r)$	$p+qr$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

তালিকা 6

$p+p'$ ও pp' এর সত্য তালিকা

p	p'	$p+p'$	pp'
1	0	1	0
0	1	1	0

তালিকা 7

উদাহরণমালা 7

নীচের বচনগুলির সত্য তালিকা নির্ণয় কর :

1. $p+q+pq$.

p	q	pq	$p+q$	$p+q+pq$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	0	0

2. $pq+p'+q'$

p	q	p'	q'	pq	$p'+q'$	$pq+p'+q$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

3. দেখাও যে সত্য তালিকার প্রত্যেক সারিতে $(p+q)'$ ও $p'q'$-এর মান সমান।

p	q	p'	q'	$p+q$	$(p+q)'$	$p'q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

উপরের তালিকা দেখ যে $(p+q)'$ ও $p'q'$-এর সত্যমান প্রত্যেক সারিতে সমান।

4. $(r'+pq)'$ এর সত্য তালিকা প্রস্তুত কর।

p	q	r	r'	pq	$r'+pq$	$(r'+pq)'$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0

প্রশ্নমালা 8

নীচের বচন গুলির সত্য তালিকা নির্ণয় কর :

1. $(p+q)(q+r)(r+p)$

2. $pqr+p'qr'+p'q'r'$

3. $p'+q'+pq$

4. $(p+q)'p$

5. $(p'+qr)'(pq+qr)$

6. $pq'+p'r'$

7. $pq'+p'q$.

8. দেখাও যে সত্য তালিকার প্রত্যেক সারিতে $(pq)'$ ও $p'+q'$-এর সত্যমান সমান।

§11. বাচনিক এ্যালজেব্রা (Algebra of Propositions)

তোমরা দ্বিতীয় অধ্যায়ে বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার ক্ষেত্রে যে প্রকারে চলরাশি, ধ্রুবক রাশি এবং অপেক্ষক কাহাকে বলে শিখিয়াছ। ঠিক সেই প্রকারেই চল বচন, ধ্রুবক বচন এবং বাচনিক অপেক্ষক কাহাকে বলে, বলা যাইবে।

সংজ্ঞা। মনে কর, $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$ এই n সংখ্যক চল বচনের দুইটি অপেক্ষক f ও g. যদি $p_1, p_2, \cdots, p_n$-এর সম্ভাব্য সকল সত্য মানের জন্য f ও g-এর সত্য তালিকা একই সঙ্গে প্রস্তুত করা যায় এবং f ও g-এর মান প্রত্যেক সারিতে সমান হয়, তবে f ও g অপেক্ষক দুইটিকে সমান বলা হয় এবং লেখা হয় $f=g$.

উপরের সংজ্ঞা অনুযায়ী §10 এর উদাহরণ 3 হইতে আমরা পাই $(p+q)'=p'q'$ এবং ঐ অনুচ্ছেদের প্রশ্নমালার 8 সংখ্যক প্রশ্ন অনুযায়ী তোমরা প্রমাণ করিতে পার $(pq)'=p'+q'$ সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে বচনের ক্ষেত্রে ডি'মরগ্যানের উপপাদ্য সিদ্ধ।

সংজ্ঞা। যে বচনের সত্যমান সর্বদা 1 বা 'সত্য' তাহাকে 1' দ্বারা চিহ্নিত করা হইবে। যে বচনের সত্যমান সর্বদা 0 বা 'অসত্য' তাহাকে '0' দ্বারা চিহ্নিত করা হইবে।

উপপাদ্য। সকল বচনের বিন্যাস একটি ব্যুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা। [The Set of all Propositions is a Boolean Algebra].

প্রমাণ। (+) ও (.) বচনের এই দুইটি সংযোজক দুইটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া এবং যদি $\mathbf{P}$ সকল বচনের বিন্যাস হয় এবং $p\varepsilon\mathbf{P}$, $q\varepsilon\mathbf{P}$ হয়, তবে $p+q$ ও pq দুইটি বচন বলিয়া $p+q\varepsilon\mathbf{P}$, $pq\varepsilon\mathbf{P}$.

এক্ষণে (1) বচনের সম্বন্ধে আমাদের ধারণা হইতে বলা যায় যে (+) (.) প্রক্রিয়া দুইটির বিনিময় নিয়মসিদ্ধ।

(2) পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের তালিকা 5 এবং তালিকা 6 হইতে বলা যায় উভয় বিচ্ছেদনিয়ম সিদ্ধ।

(3) (+) প্রক্রিয়ার একক পদ '0' বচন। কারণ, $0+p$ এবং p-এর সত্য মান সর্বদা সমান এবং সুতরাং $0+p=p$.

অনুরূপে (.) প্রক্রিয়ার একক পদ '1' বচন।

(4) প্রত্যেক বচন p-এর জন্য একটি বচন p' পাওয়া যায় যে $p+p'=1$ এবং $pp'=0$ (§10 এর তালিকা 7 দেখ)।

সুতরাং বলা যায় যে p-এর পদগুলি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার সবকয়টি নিয়ম মানে। $\therefore$ p একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা অর্থাৎ সকল বচনের বিন্যাসটি একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা।

দ্রষ্টব্য। যেহেতু সকল বচনের বিন্যাসটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা এবং প্রত্যেক বচনের সত্যমান 1 এবং 0, অতএব

$0+1=0$; $1+0=0$; $0+0=0$; $1+1=1$

$0.1=0$, $1.0=0$; $0.0=0$; $1.1=1$

সত্যমান হইতে বচন নির্ণয় (Determination of proposition from its truth values): সত্যতালিকা হইতে কোন বচনের সম্ভাব্য সকল সত্যমান নির্ণয় করিতে তোমরা শিখিয়াছ। এইবার বিপরীত পদ্ধতিটি সম্বন্ধে আলোচনা করা যাক। মনে কর, মৌলিক বচনগুলির কোন্ কোন্ সত্যমানের জন্য কোন সংযুক্ত বচনের সত্যমান 'সত্য' তোমরা জান। সুতরাং তোমরা ঐ সংযুক্ত বচনের সত্য তালিকা নির্ণয় করিতে পারিবে। এখন তোমরা জান বচনগুলি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রার সকল নিয়ম পালন করে। সুতরাং অনুচ্ছেদ 6এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে তোমরা সহজেই বচনটি নির্ণয় করিতে পারিবে।

উদাহরণ। p, q, r তিনটি মৌলিক বচন। p, q ও r দ্বারা সংযুক্ত একটি বচনের সত্যমান 1,

যখন (a) $p=1$ এবং $q=r=0$

ও (b) $p=r=1$ এবং $q=0$

তোমরা সহজেই নীচের সত্য তালিকাটি নির্ণয় করিতে পার। মনে কর সংযুক্ত বচনটি f.

সারি	p	q	r	f
1	1	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	1
4	1	0	0	1
5	0	1	1	0
6	0	1	0	0
7	0	0	1	0
8	0	0	0	0

এক্ষণে অনুচ্ছেদ 6এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুযায়ী, নির্ণেয় বচনটি

$pq'r'+pq'r=pq'(r'+r)=pq'.1=pq'$

দ্রষ্টব্য। পদ্ধতিটি বুঝিতে পারিলে সত্য তালিকা নির্ণয়ের প্রয়োজন নাই।

উদাহরণমালা 8

1. যেহেতু সকল বচনের বিন্যাস একটি বুলিয়ান্ এ্যালজেব্রা, অতএব p, q, r তিনটি বচন হইলে $(pq)r=p(qr)$;

সত্য তালিকা হইতে ইহা প্রমাণ কর।

উত্তর।

সারি	p	q	r	pq	qr	$(pq)r$	$p(qr)$
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	0	0	0
3	1	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	1	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0

সত্য তালিকার প্রত্যেক সারিতে যেহেতু $(pq)r$ ও $p(qr)$-এর মান সমান, $(pq)r=p(qr)$

2. সত্য তালিকা হইতে প্রমাণ কর যে,

উঃ $p(p+q)=p$ এবং $p+pq=p$

সারি	p	q	$p+q$	pq	$p(p+q)$	$p+pq$
1	1	1	1	1	1	1
2	1	0	1	0	1	1
3	0	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0

সত্য তালিকায় দেখ, p, $p(p+q)$ এবং $p+pq$ প্রত্যেকের সত্যমান প্রত্যেক সারিতে সমান।

$\therefore \quad p=p+pq=p(p+q)$

3. নীচের বচনগুলির নঞর্থক বচনগুলি নির্ণয় কর।

(i) প্রণব কবিতা পড়িতেছে এবং প্রদীপ বাড়ি নাই।

(ii) প্রণব কবিতা পড়িতেছে না অথবা পরেশ গান শুনিতেছে।

(iii) পরেশ গান শুনিতেছে না এবং প্রদীপ বাড়ি আছে।

(iv) প্রণব কবিতা পড়িতেছে অথবা পরেশ গান শুনিতেছে না।

উঃ মনে কর, $p=$প্রণব কবিতা পড়িতেছে।

$q=$প্রদীপ বাড়ি নাই

এবং $r=$পরেশ গান শুনিতেছে।

অতএব $p'=$প্রণব কবিতা পড়িতেছে না

$q'=$প্রদীপ বাড়ি আছে।

$r'=$পরেশ গান শুনিতেছে না।

এক্ষণে,

(i) প্রদত্ত বচনটি $p.q.$

$\therefore$ নির্ণেয় নঞর্থক বচনটি

$(pq)'=p'+q'$

বা, প্রণব কবিতা পড়িতেছে না অথবা প্রদীপ বাড়ি আছে।

(ii) প্রদত্ত বচনটি $p'+q.$

$\therefore$ নির্ণেয় নঞর্থক বচনটি

$(p'+q)'=pq'$

বা প্রণব কবিতা পড়িতেছে এবং প্রদীপ বাড়ি আছে।

(iii) প্রদত্ত বচনটি $r'q'$

∴ নির্ণেয় নঞর্থক বচনটি $(r'q')'=r+q$.

বা, অথবা প্রদীপ বাড়ি নাই। পরেশ গান শুনিতেছে

(iv) প্রদত্ত বচনটি $p+q'$

∴ নির্ণেয় নঞর্থক বচনটি

$(p+q')'=p'q$

বা প্রণব কবিতা পড়িতেছে না এবং প্রদীপ বাড়ি নাই।

4. p, q, r এই তিনটি মৌলিক বচন দ্বারা সংযুক্ত তিনটি বচন F_1, F_2, F_3. প্রদত্ত সত্য হইতে তালিকা F_1, F_2, ও F_3 বচন তিনটি নির্ণয় কর।

সারি	p	q	r	F_1	F_2	F_3
1	1	1	1	0	1	1
2	1	1	0	0	1	1
3	1	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	1	0
6	0	1	0	0	1	0
7	0	0	1	1	0	1
8	0	0	0	0	0	1

উঃ F_1 : সারি 5 ও 7এ প্রদত্ত p, q, r-এর মানের জন্য F_1-এর মান 1 এবং অন্য সারিগুলিতে F_1-এর মান 0, সুতরাং F_1-এর বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে মাত্র দুইটি পদ থাকিবে। 5 ও 7 সংখ্যক সারিদ্বয়ে প্রদত্ত p, q ও r-এর মান অনুযায়ী পদগুলি হইবে $p'\,q\,r$ এবং $p'\,q'\,r$

∴ নির্ণেয় $F_1=p'qr+p'q'r$

F_2 : সারি 1, 2, 5 এবং 6এ প্রদত্ত p, q, r-এর মানের জন্য F_2 এর মান 1 এবং অন্য সারিগুলিতে F_2এর মান 0 সুতরাং F_2এর বৈকল্পিক

নরম্যাল আকারে চারিটি পদ থাকিবে। 1, 2, 5 এবং 6 সারিগুলিতে প্রদত্ত p, q ও r এর মান অনুযায়ী পদগুলি হইবে pqr, pqr', $p'qr$, $p'qr'$.

$\therefore$ নির্ণেয় $F_2 = pqr + pqr' + p'qr + p'qr'$

F_3 : সারি 1 ও 3এ প্রদত্ত p, q, r-এর মানের জন্য F_3-এর মান 1 এবং অন্য সারিগুলিতে F_1-এর মান. সুতরাং F_3-এর বৈকল্পিক নরম্যাল আকারে মাত্র দুইটি পদ থাকিবে। 1 ও 3 সংখ্যক সারিদ্বয়ে প্রদত্ত p, q ও r-এর মান অনুযায়ী পদগুলি হইবে pqr এবং $pq'r$.

$\therefore$ $F_3 = pqr + pq'r$

উঃ 5. p, q, r তিনটি বচন। p-এর সত্যমান 'সত্য' এবং q ও r-এর সত্যমান অসত্য। নীচের বচনগুলির কোন্‌টি সত্য এবং কোন্‌টি অসত্য বল।

(a) $p+q$ (b) $p'+(q+r)$ (c) $pq+qr$

(d) $(pq+p'q')+p'q+pq')$

এখানে $p=1$, $q=r=0$; সুতরাং $p'=0$ এবং $q'=r'=1$

এক্ষণে,

(a) $p+q=1+0=1$ $\therefore$ $p+q$ বচনটি সত্য।

(b) $p'+(q+r)=0+(0+0)=0$ $\therefore$ $p'+(q+r)$ বচনটি অসত্য

(c) $pq+qr=1.0+0.0=0+0=0$

$\therefore$ $pq+qr$ বচনটি অসত্য।

(d) $(pq+p'q')+(p'q+pq')$

$=(1.0)+(0.1)+(0.0+1.1)$

$=(0+0)+(0'+1)=0+1=1$

$\therefore$ $(pq+p'q')+(p'q+pq')$ বচনটি সত্য।

প্রশ্নমালা 9

1. নীচের বচনগুলির নঞর্থক বচনগুলি নির্ণয় কর :—

(a) রমেশ পরিশ্রমী এবং রাম বুদ্ধিমান।

(b) সোবার্স একজন ভাল ব্যাটস্‌ম্যান এবং বেদী একজন ভাল বোলার।

(c) শরৎচন্দ্র একজন সুসাহিত্যিক অথবা তোমার সাহিত্য সম্বন্ধে কোন জ্ঞান নাই।

2. p, q ও r তিনটি মৌলিক বচন। এই মৌলিক বচনগুলি দ্বারা সংযুক্ত তিনটি বচন f, g ও h-এর সত্য তালিকা নীচে দেওয়া হইল। বচন তিনটি নির্ণয় কর।

সারি	p	q	r	f	g	h
1	1	1	1	1	1	0
2	1	1	0	1	0	0
3	1	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	0	1
5	0	1	1	1	0	0
6	0	1	0	1	0	0
7	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	1	0	0

3. একটি পরীক্ষায় একটি ছাত্রকে পাঁচটি বক্তব্যের কোন্‌টি শুদ্ধ এবং কোন্‌টি অশুদ্ধ নির্ণয় করিতে বলা হইল।

ছাত্রটির পরীক্ষক সম্বন্ধে নিম্নের দুইটি সঠিক ধরণা ছিল।

(*i*) পরীক্ষক অশুদ্ধ বক্তব্য অপেক্ষা শুদ্ধ বক্তব্য বেশী দিবেন।

(*ii*) পরপর তিনটি প্রশ্নের একই উত্তর হইবে না।

প্রথম এবং শেষ প্রশ্ন দুইটি হইতে সে বুঝিতে পারিল যে, উহাদের বিপরীত উত্তর হইবে। ইহা ব্যতীত ছাত্রটি দ্বিতীয় প্রশ্নের সঠিক উত্তর জানিত। দেখা গেল, ছাত্রটি পাঁচটি প্রশ্নেরই সঠিক উত্তর দিয়াছে। এখন বল, ছাত্রটি প্রশ্ন পাঁচটির কি উত্তর দিয়াছিল ?

4. যদি p ও q বচন দুইটির সত্যমান সত্য এবং r ও s বচন দুইটির সত্যমান অসত্য হয়, তবে নীচের বচনগুলির সত্যমান নির্ণয় কর।

(*i*) $(p+q)(r+s)$. (*ii*) $pq+rs$. (*iii*) $(p+r)(q+s)$

(*iv*) $(pr)+(q.s)$. (*v*) $[p.(q+r)]+q'(p.q)+pr)$.

(*vi*) $\sim\{\sim[\sim(p.\sim q).\sim p]\sim p\}$

(*vii*) $\sim\{\sim[\sim(r.\sim p)\sim r]\sim p\}$.

§12. **অবজেক্ট লজিক ও সিন্ট্যাক্স লজিক (Object Logic and Syntax Logic) :** বর্তমান অধ্যায়ে বচনের কোন গাণিতিক সংজ্ঞা দেওয়া হয় নাই। বচনকে একটি অসংজ্ঞেয় পদ (undefined term) মনে করা হইয়াছে। এখন প্রশ্ন উঠিতে পারে আমাদের আলোচনায় বচন সম্বন্ধে যাহা বলা হইয়াছে তাহাও বচন কিনা। এই প্রশ্নের স্পষ্ট উত্তর দিবার জন্য প্রথমেই যুক্তিশাস্ত্র বা লজিকের শ্রেণীবিভাগ সম্বন্ধে কিছু বলা প্রয়োজন। আমরা যে যুক্তিশাস্ত্র বা লজিক সম্বন্ধে আলোচনা করিতেছি তাহা অবজেক্ট লজিক এবং এই অবজেক্ট লজিক আলোচনার জন্য যে লজিক ব্যবহার করিতেছি তাহা সিন্ট্যাক্স্ লজিক। p, q অবজেক্ট লজিকের দুইটি বচন। p', $p.q$ বা $p+q$ও অবজেক্ট লজিকের বচন। কিন্তু "p সত্য" বা "p অসত্য" বচন দুইটি সিন্ট্যাক্স লজিকের বচন।

§13. **টটোলজি, কন্ট্র্যাডিক্সন্ ও কন্টিন্জেন্সি (Tautology, Contradiction and Contingency) :**

যদি কোন বাচনিক্ অপেক্ষকের সত্যমান চলগুলির সকল সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য সর্বদা 'সত্য' হয়, তবে অপেক্ষকটিকে একটি টটোলজি বলা হয়। সুতরাং টটোলজির সত্যতালিকায় প্রত্যেক সারিতে সত্যমান 1.

যদি কোন বাচনিক্ অপেক্ষকের সত্যমান চলগুলির সকল সম্ভাব্য সত্যমানের জন্য সর্বদা "অসত্য" হয়, তবে অপেক্ষকটিকে একটি কন্ট্র্যাডিক্সন্ বলা হয়। সুতরাং কন্ট্রাডিক্সন্-এর সত্য তালিকায় প্রত্যেক সারিতে সত্যমান 0.

যে বাচনিক অপেক্ষক টটোলজি বা কন্ট্র্যাডিক্সন্ নয় তাহাকে কন্টিন্জেন্সি বলে। সুতরাং কন্টিন্জেন্সি-এর সত্য তালিকার বিভিন্ন সারিতে বিভিন্ন সত্যমান থাকিবে।

উদাহরণমালা 9

1. সত্য তালিকার সাহায্যে দেখাও যে p একটি বচন হইলে $p+p'$ একটি টটোলজি—

p	p'	$p+p'$
1	0	1
0	1	1

সত্য-তালিকা হইতে বলা যায় $p+p'$ একটি টটোলজি।

2. দেখাও যে p একটি বচন হইলে pp' একটি কন্‌ট্র্যাডিক্সন্—

p	p'	pp'
1	0	0
0	1	0

সত্য-তালিকায় pp'-এর মান প্রত্যেক সারিতে 0, সুতরাং pp' একটি কন্‌ট্র্যাডিক্সন্।

3. সত্য-তালিকার সাহায্যে নীচের কোন্‌গুলি টটোলজি, কন্‌ট্র্যাডিক্সন্ বা কন্‌টিন্‌জেন্সি নির্ণয় কর।

(a) $pq+p'+q'$ (b) $pqr+p'qr+pqr'$.

(a)

p	q	p'	q'	pq	$pq+p'+q'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

প্রত্যেক সারিতে $pq+p'+q'$-এর সত্যমান 1.

∴ $pq+p'+q'$ বচনটি একটি টটোলজি।

(b) $pqr+p'qr+pqr'$.

p	q	r	p'	r'	pqr	$p'qr$	pqr'	$pqr+p'qr+pqr'$
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0

যেহেতু বিভিন্ন সারিতে $pqr+p'qr+pqr'$ এর মান বিভিন্ন, প্রদত্ত বচনটি একটি কন্‌টিন্‌জেন্সি।।

প্রশ্নমালা 10

সত্য-তালিকার সাহায্যে নীচে প্রদত্ত বচনগুলির কোন্‌গুলি টটোলজি, কন্‌ট্র্যাডিক্সন্ বা কন্‌টিন্‌জেন্সি নির্ণয় কর :—

1. $p+q+p'q'$. 2. $(p+q)(q'+p)$. 3. $p'+pq'$.
4. $(pq+qr+rp+p'q'r')'$. 5. $\{(p'+q)'+q\}'+q$.
6. $(pq+qr+rp)'+(p+q)(q+r)(r+p)$.

§14. লক্ষণা ও তুল্যতা (Implication and Equivalence) :

"যদি বৃষ্টি হয় তবে রাম আসিবে না" এই বচনে 'যদি' ও 'তবে'র মধ্যবর্তী 'বৃষ্টি হয়'কে **পূর্বগ (antecedent)** এবং 'রাম আসিবে না'কে **অনুগ (consequent)** বলা হয়। সাধারণতঃ 'যদি p তবে q' বচনে p পূর্বগ এবং q অনুগ। এইবার নীচের বচন তিনটি লক্ষ্য কর।

1. যদি সব বাঙালী পড়িতে পারে এবং রাম একজন বাঙালী হয়, তবে রাম পড়িতে পারে।

2. যদি ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক হয়, তবে ইহার বিপরীত বাহুগুলি সমান।

3. যদি সোনা একোয়ারিজিয়ায় রাখা হয়, তবে সোনা দ্রবিভূত হয়।

প্রথমবাক্যে সব বাঙালী পড়িতে পারে এবং রাম একজন বাঙালী হয়, পূর্বগ এবং রাম পড়িতে পারে অনুগ। এখানে পূর্বগ হইতে অনুগ যুক্তি অনুযায়ী (Logically) পাওয়া যায়।

দ্বিতীয় বাক্যে সংজ্ঞা অনুযায়ী পূর্বগ হইতে অনুগ পাওয়া যায়।

তৃতীয় বাক্যে একমাত্র পরীক্ষার দ্বারা স্থির করা যায় যে পূর্বগ সত্য হইলে অনুগ সত্য হইবে কিনা।

উপরের আলোচনা হইতে দেখ, পূর্বগ সত্য হইলে অনুগ সত্য হইবে কিনা, ত্রিবিধ প্রণালীতে স্থির করা যায়। যদি পূর্বগ সত্য হইলে অনুগ সত্য হয়, তবে আমরা বলি পূর্বগ-এর **লক্ষণা (Implication)** অনুগ। অর্থাৎ p ও q দুইটি বচন হইলে "যদি p সত্য হয়, তবে q সত্য" হইলে আমরা বলি p বচনের লক্ষণা q বচন। উপরের তিনটি বচনের প্রথমটিতে "সব বাঙালী পড়িতে পারে এবং রাম একজন বাঙালী" বচনটি সত্য হইলে "রাম পড়িতে

পারে” বচনটি সত্য। সুতরাং প্রথম বচনটির লক্ষণা দ্বিতীয় বচন। এইপ্রকার লক্ষণাকে **যুক্তিভিত্তিক লক্ষণা** (**Logical Implication**) বলে। দ্বিতীয় বচনটির লক্ষণাকে বলা হয় **সংজ্ঞাভিত্তিক লক্ষণা** (Implication by definition). তৃতীয় বাক্যের লক্ষণাকে **বস্তুগত লক্ষণা** (**Material Implication**) বলে। আমাদের আলোচ্য বস্তুগত লক্ষণা। p ও q বচন হইলে যদি p বচনের বস্তুগত লক্ষণা q বচন হয়, তবে আমরা লিখি $p \rightarrow q$. অতঃপর আমরা লক্ষণা বলিতে বস্তুগত লক্ষণাকে বুঝাইব।

তৃতীয় বচনটি লইয়া আবার আলোচনা করা যাক। স্পষ্টত: ঐ বচনটি অসত্য প্রমাণিত হইবে যদি সোনা একোয়ারিজিয়ায় রাখার পর দেখা যায় সোনা দ্রবিভূত হইতেছে না। অর্থাৎ “সোনা একোয়ারিজিয়ায় রাখা হয়” বচনটিকে যদি p এবং “সোনা দ্রবিভূত হয় না” বচনটিকে q বলা হয় তবে $p \rightarrow q$ অসত্য হইবে একমাত্র যদি p সত্য এবং q অসত্য হয়। অর্থাৎ যদি $p.q'$ যৌগিক বচনটি অসত্য হয় বা $(p.q')'$ যৌগিক বচনটি সত্য হয়। ডিমরগ্যানের উপপাদ্য অনুযায়ী $(pq')' = p' + (q')' = p' + q$. সুতরাং $p \rightarrow q = p' + q$.

যেহেতু $p' + q$ একটি বচন, অতএব $p \rightarrow q$ একটি বচন। যদি p ও q দুইটি বচন হয় তবে $(p \rightarrow q)(q \rightarrow p)$ অর্থাৎ $(p' + q)(p + q')$ বচনটি সত্য হইলে p ও q বচন দুইটিকে বস্তুগত সমতুল্য (Materially Equivalent) বলা হয়। দুইটি বচন p ও q সমতুল্য হইলে লেখা হয় $p \rightarrow q$. মনে রাখিবে $p \rightarrow q$, $p \leftarrow\rightarrow q$ ইত্যাদি বচন।

$q \rightarrow p$ লক্ষণাকে $p \rightarrow q$ লক্ষণার কনভার্স (converse) বা বিপরীত লক্ষণা বলা হয়। $p' \rightarrow q'$ লক্ষণাটি $p \rightarrow q$ লক্ষণার ইন্‌ভার্স (Inverse) বা বিরুদ্ধ এবং $q' \rightarrow p'$ লক্ষণাটি $p \rightarrow q$ লক্ষণা-এর কন্‌ট্র্যাপসিটিভ্ (contra-positive) এখন দেখ p q লক্ষণার কন্‌ট্র্যাপসিটিভ্ লক্ষণা $q' \rightarrow p'$ অর্থাৎ

$(q')' + p' = q + p' = p' + q$. সুতরাং $p \rightarrow q = q' \rightarrow p'$

আবার $q \rightarrow p = q' + p = p + q'$

এবং $p' \rightarrow q' = (p')' + q' = p + q'$

সুতরাং $q \rightarrow p = p' \rightarrow q'$

নীচে চারিপ্রকার লক্ষণার সত্য তালিকা দেওয়া হইল।

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$p'\to q'$	$q'\to p'$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

সত্য তালিকাটি হইতেও তোমরা দেখিতে পার যে, কোন লক্ষণা এবং তাহার কন্‌ট্র্যাপসিটিভ্ লক্ষণা সমান এবং কোন লক্ষণার কনভার্স ও ইন্‌ভার্স লক্ষণাদ্বয় সমান।

উদাহরণমালা 10

1. যদি p ও q বচন দুইটির সত্যমান সত্য হয় তবে নীচের বচনগুলির সত্যমান নির্ণয় কর।

(i) $p\to(q\to p)$. (ii) $(p\to q)\to p$. (iii) $(p.q)'\to(p'+q')$

এখানে p ও q-এর সত্যমান 1.

(i) $p\to(q\to p)$-এর অর্থ $p\to(q'+p)$ বচনটি সত্য।

আবার, $p\leftarrow(q'+p)$-এর অর্থ $p'+q'+p$ বচনটি সত্য।

কিন্তু, $p'+q'+p=p'+p+q'=1+q'=1+0=1$

(ii) $(p\to q)\to p$-এর অর্থ $(p'+q)\to p$ বচনটি সত্য।

অর্থাৎ $(p'+q)p'$ বচনটি অসত্য।

অর্থাৎ $p'+p'q$ বচন অসত্য।

এক্ষণে $p'+p'q=0+0.1=0$

সুতরাং $p'+p'q$ বচনটি অসত্য।

অর্থাৎ প্রদত্ত লক্ষণাটি সত্য।

(iii) $(p.q)'\to(p'+q')$-এর অর্থ $\{(pq)'\}'+p'+q'$-এর সত্যমান সত্য

অর্থাৎ $pq+p'+q'$-এর সত্যমান সত্য।

এক্ষণে $pq+p'+q'=1+0+0=1$

2. সত্য তালিকার সাহায্যে প্রমাণ কর যে,

$[p\to(q\to r)]\to[(p\to q)\to(p\to r)]$ একটি টটোলজি।

$q\to r$এর অর্থ $q'+r$. $\therefore$ $p\to(q\to r)$এর অর্থ $p'+q'+r$.

আবার, $p\to q$এর অর্থ $p'+q$

$p\to r$এর অর্থ $p'+r$

$\therefore$ $(p\to q)\to(p\to r)$এর অর্থ $(p'+q)'+p'+r=pq'+p'+r$.

$\therefore$ $[p\to(q\to r)]\to[(p\to q)\to(p\to r)]$এর অর্থ

$(p'+q'+r)'+pq'+p'+r\cdots\cdots(1)$

এক্ষণে (1) বচনটির সত্য তালিকা নির্ণয় করা হইতেছে।

সারি	p	q	r	p'	q'	$p'+q'+r$	$(p'+q'+r)'$	pq'	$(p'+q'+r)'+pq'+p'+r$
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	1	0	1
3	1	0	1	0	1	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	1	0	1	1
5	0	1	1	1	0	1	0	0	1
6	0	1	0	1	0	1	0	0	1
7	0	0	1	1	1	1	0	0	1
8	0	0	0	1	1	1	0	0	1

যেহেতু সত্য তালিকার প্রত্যেক সারিতে $(p'+q'+r)'+pq'+p'+r$এর মান 1, সুতরাং, প্রদত্ত লক্ষণাটি একটি টটোলজি।

3. "কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক" :—এই বচনটির সকল প্রকার লক্ষণা নির্ণয় কর।

মনে কর, p = কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান।

এবং q = চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

অতএব প্রদত্ত বচনটি $p \to q$.

সুতরাং ইহার কন্‌ভার্স বচন : $q \to p$

অর্থাৎ "কোন চতুর্ভুজ একটি সামান্তরিক হইলে, চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলি সমান।"

প্রদত্ত লক্ষণার ইন্‌ভার্স লক্ষণা $p' \to q'$

অর্থাৎ "কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান না হইলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক নহে।"

আবার প্রদত্ত লক্ষণার কন্‌ট্র্যাপসিটিভ্ লক্ষণাটি $q' \to p'$

অর্থাৎ "কোন চতুর্ভুজ সামান্তরিক না হইলে উহার বিপরীত বাহুগুলি সমান হইবে না।"

প্রশ্নমালা 1

যদি p ও q বচন দুইটির সত্যমান 'সত্য' এবং r ও s বচন দুইটির সত্যমান 'অসত্য' হয়, তবে নীচের বচনগুলির সত্যমান নির্ণয় কর :—

1. $r \quad (q \to r)$. 2. $(r \to q) \quad r$. 3. $(r \to s) \to r$

4. $(p \to r) \to (r \to p)$ 5. $(p \to r) \to (r \to p)$

6. $(r \to p) \to (p' \to r')$ 7. $[(p \to q) \to p)] \to p$.

8. $[(r \to q) \to r] \to r$. 9. $[(p.q) \to r] \to (p \to (q \to r))]$

নীচের লক্ষণাগুলির সকল প্রকার লক্ষণা নির্ণয় কর :—

10. যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হয়, তবে সমান বাহু দুইটির বিপরীত কোণদ্বয় সমান।

11. যদি কোন সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হয়, তবে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র।

12. যদি $a = b$ হয়, তবে $a + c = b + c$.

13. যদি $a \neq b$ হয়, তবে $ac \neq bc$.

§15. **বচনের সত্য-বিন্যাস** (**Truth Sets for Propositions**)

তোমরা শিখিয়াছ যে, কোন বচনের সত্যমান দুইটি : 'সত্য' এবং 'অসত্য'। সুতরাং প্রত্যেক বচনের সত্যসম্ভাবনা (Truth Possibility) দুইটি। একাধিক মৌলিক বচনের দ্বারা সংযুক্ত কোন বচনের সত্য-সম্ভাবনা ঐ মৌলিক বচনগুলির সত্যমানের উপর নির্ভরশীল। সুতরাং কোন গাণিতিক বা যৌক্তিক সমস্যার সহিত জড়িত কোন বচনের একাধিক সত্য-সম্ভাবনা থাকে। ঐসকল সমস্যার সমাধানের জন্য ঐসকল সত্য-সম্ভাবনার নির্ভুল বিশ্লেষণ প্রয়োজন। সত্য-তালিকা নির্ণয় সত্যসম্ভাবনা বিশ্লেষণের একটি পদ্ধতি। কিন্তু এই পদ্ধতি সর্বদা কার্যকরী নয়। তখন অন্য পদ্ধতিতে এই বিশ্লেষণ করা হয়। দ্বিতীয় এই পদ্ধতিকে যৌক্তিক সম্ভাবনা (logical possibility)এর বিশ্লেষণ বলে।

নীচের উদাহরণ দুইটি দেখ।

উদাহরণ 1. "রামের বয়স রমেশের বয়স অপেক্ষা বেশী নয় অথবা রমেশের বয়স রামের বয়স অপেক্ষা বেশী নয়"। এই বৈকল্পিক বচনটির সত্য-তালিকা নির্ণয় কর।

মনে কর, $p=$ রামের বয়স রমেশের বয়স অপেক্ষা বেশী।
এবং $q=$ রমেশের বয়স রামের বয়স অপেক্ষা বেশী।
অতএব প্রদত্ত বচনটি $p'+q'$.

এখন দেখ,

সারি	p	q	p'	q'	$p'+q'$
1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1
4	0	0	1	1	1

উপরের সত্য-তালিকায় দেখ প্রদত্ত বৈকল্পিক বচনটি সকল ক্ষেত্রে সত্য নয়। কিন্তু স্পষ্টতঃ বচনটি একটি টটোলজি। সুতরাং সত্য-তালিকার দ্বারা সত্য সম্ভাবনার সঠিক বিশ্লেষণ হইতেছে না। প্রকৃত পক্ষে সত্য-তালিকা দ্বারা চল বচনের সত্য সম্ভাবনার সঠিক বিশ্লেষণ হয়। কিন্তু কোন নির্দিষ্ট বচন বা ধ্রুবক বচনের নির্ভুল বিশ্লেষণ সত্য-তালিকা দ্বারা সম্ভব নহে।

উদাহরণ 2. দুইটি মুদ্রার একটি পৃষ্ঠে অশোকস্তম্ভ এবং অপরপৃষ্ঠে ধানের শীষ মুদ্রিত আছে। মুদ্রা দুইটি একইসঙ্গে ছোড়া হইল। "ভূমিতে পড়িবার পর মুদ্রা দুইটির উপরের পৃষ্ঠে অশোকস্তম্ভ হইবে" বচনটির সত্যমান সম্বন্ধে আলোচনা কর।

প্রদত্ত বচনের সত্যমান নির্ণয়ের জন্য বচনটির সহিত জড়িত সকল যৌক্তিক সম্ভাবনার বিশ্লেষণ করা যাক। নীচের তালিকাটিতে সকল যৌক্তিক সম্ভাবনা দেখান হইল।

সম্ভাবনা	প্রথম মুদ্রা	দ্বিতীয় মুদ্রা	সত্য-মান
1	অশোকস্তম্ভ	অশোকস্তম্ভ	1
2	অশোকস্তম্ভ	ধানের শীষ	0
3	ধানের শীষ	অশোকস্তম্ভ	0
4	ধানের শীষ	ধানের শীষ	0

দেখ, একমাত্র প্রথম সম্ভাবনায় বচনটির সত্যমান 1 বা সত্য এবং অন্যান্য সকল ক্ষেত্রে বচনটির সত্যমান 0 বা অসত্য।

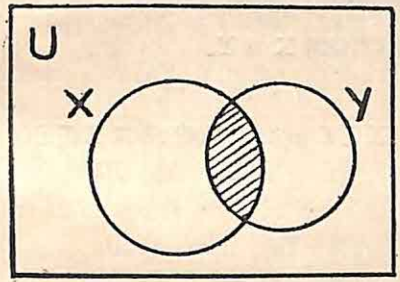
এইবার মনে, কর P আলোচ্য কতকগুলি বচনের বিন্যাস। Pএর প্রত্যেক বচন Pএর একাধিক যৌক্তিক সম্ভাবনা থাকিতে পারে। Pএর সকল বচনের সকল যৌক্তিক সম্ভাবনার বিন্যাসটিকে সার্বিক বিন্যাস U বল। U নির্ণয়ের জন্য সর্বদা মনে রাখিবে যে, (1) সম্ভাব্য প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি এবং একটিমাত্র সম্ভাবনা থাকিবে। এবং (2) প্রত্যেক যৌক্তিক সম্ভাবনার জন্য প্রত্যেক বচনের সত্যমান নির্ণয় করা যাইবে।

মনে কর, যে সকল যৌক্তিক সম্ভাবনার জন্য p-এর সত্যমান 'সত্য' তাহাদের বিন্যাস X, সুতরাং X, Uএর একটি উপবিন্যাস। Xকে p বচনের **সত্য-বিন্যাস** (**Truth Set**) বলা হয়। এই প্রকারে P-এর প্রত্যেক পদের

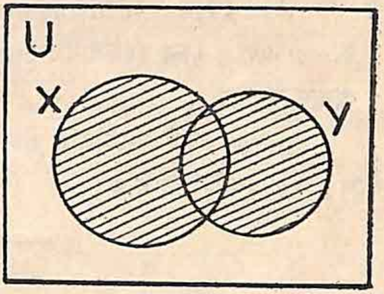
জন্য একটি করিয়া সত্যবিন্যাস নির্ণয় করা যাইবে। আবার একাধিক মৌলিক বচনের সংযুক্ত বচনের সত্যবিন্যাস ঐ মৌলিক বচনগুলির সত্যবিন্যাসগুলি হইতে পাওয়া যাইবে। নীচে বিভিন্ন যৌগিক ও বৈকল্পিক বচনের ভেন্ চিত্র দেওয়া হইল। চিত্রগুলিতে

$X = p$ বচনের সত্যবিন্যাস।

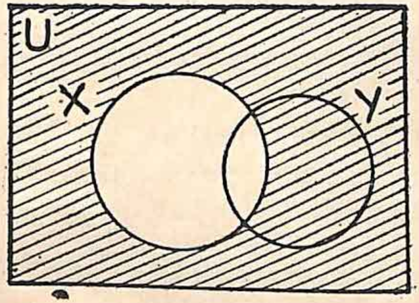
এবং $Y = q$ বচনের সত্যবিন্যাস।



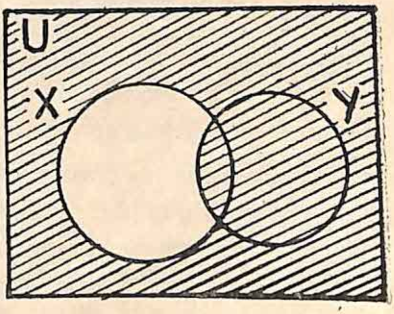
রেখিত অংশ pq বচনের সত্যবিন্যাস



রেখিত অংশ $p+q$ বচনের সত্যবিন্যাস



রেখিত অংশ p' বচনের সত্যবিন্যাস



রেখিত অংশ $p'+q$ বা $p \rightarrow q$ বচনের সত্যবিন্যাস

দেখ, $p.q$ অর্থাৎ p এবং q বচনটির সত্যবিন্যাসের পদগুলি সেইসকল সত্য সম্ভাবনা যাহাদের জন্য এবং p এবং q উভয় বচনের সত্যমান সত্য। সুতরাং $p.q$ বচনের সত্যবিন্যাস p বচনের সত্যবিন্যাস X ও q বচনের সত্য-বিন্যাস Yএর ছেদবিন্যাস। অনুরূপে $p+q$ বচনের সত্যবিন্যাস X ও Y বিন্যাসের যোগবিন্যাস।

প্রশ্নমালা 12

1. p, q, r তিনটি বচন। নীচের বচনগুলির ভেন্‌চিত্র অঙ্কন কর।
   (a) $(p+q).r$ (b) $pq+r$ (c) $p'q'$ (d) $p'+q'$ (e) $(pq)'$
   (f) $p.q.r$ (g) $p+q+r$.
2. প্রমাণ কর যে,
   (a) কোন টটোলজির সত্যবিন্যাস, সার্বিক বিন্যাস U, এবং
   (b) কোন কন্‌ট্র্যাডিক্সন্‌এর সত্যবিন্যাস, শূন্যবিন্যাস ϕ.
3. p এবং q বচন দুইটির সত্যবিন্যাস যথাক্রমে X ও Y.

প্রমাণ কর যে,

$p \to q$ একটি টটোলজি হইলে $X \subset Y$ এবং বিপরীতক্রমে $X \subset Y$ হইলে $p \to q$ একটি টটোলজি।

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা 11-13)

1. (a) বিন্যাস নয় ; (b) বিন্যাস ; (c) বিন্যাস ; (d) বিন্যাস নয় ; (e) বিন্যাস নয়। 2. 5 ; 4. প্রদত্ত বিন্যাসের পদ (b), (d) ও (g). 5. (c). 6. (a) ইংরাজি স্বরবর্ণগুলির বিন্যাস ;

(b) ইংরাজি বর্ণমালার শেষ তিনটি বর্ণের বিন্যাস ; (c) প্রথম পাঁচটি অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যার বিন্যাস। (d) যে সকল বাংলা মাসের প্রথম অক্ষর A (কিংবা অ বা আ) তাহাদের বিন্যাস।

7. 5 ; 8. পদ নয়।

9. (a) শূন্যবিন্যাস ; (b) শূন্যবিন্যাস ; (c) শূন্যবিন্যাস নয়। (d) শূন্যবিন্যাস। 10. নয়। 11. $A=B$.

13. (a) $B \subset A$; (b) $D \subset C$.

14. (a) সসীম বিন্যাস ; (b) অসীম বিন্যাস ; (c) সসীম বিন্যাস : (d) অসীম বিন্যাস ; (e) সসীম বিন্যাস ;

15. (i) $B \subset A$ (ii) এখানে কোন উপবিন্যাস সম্পর্ক নাই ; (iii) এখানে কোন উপবিন্যাস সম্পর্ক নাই।

16. (i) শুদ্ধ (ii) অশুদ্ধ (iii) শুদ্ধ (iv) অশুদ্ধ (v) অশুদ্ধ।

17. (i) $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \phi$. (ii) $\{\{\phi\}\}, \{\phi\}, \phi$. (iii) $\{\{\phi\}, \{\phi\}\}, \{\phi\}, \phi$.

18. (i) $\{x : x$ একটি ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা $\}$ (ii) $\{x : x$ একটি ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $\}$

(iii) $\{x : x$, 1 এর একটি ঘনমূল $\}$.

19. $\{\phi\} \in \{\{\phi\}\}$; $\{\phi\} \in \{\phi, \{\phi\}\}$; $\{\{\phi\}\} \in \{\phi, \{\phi\}\}$.
$\{\phi\} \subset \{\phi, \{\phi\}\}$; $\{\{\phi\}\} \subset \{\phi, \{\phi\}\}$.

20. Sএর একটি উদাহরণ : $S=\{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (d, e)\}$,

প্রশ্নমালা 2 [পৃষ্ঠা 30-32]

1. $A \cap B=\{x : 60 \leqslant x \leqslant 100\}$ 2. শুদ্ধিপত্র দেখ।

$A \cap T$=সকল ভারতীয় শিক্ষকের বিন্যাস ; $(A \cap T) \cap M$=যে সকল ভারতীয় শিক্ষক গণিতজ্ঞ, তাঁহাদের বিন্যাস। $(A \cap T) \cap M=A \cap (T \cap M)$.

3. (a) শুদ্ধ (b) অশুদ্ধ (c) শুদ্ধ (d) অশুদ্ধ (e) শুদ্ধ (f) অশুদ্ধ (g) অশুদ্ধ। 4. $A \cap B=\{0, 6, 12, 18, \cdots\}$

6. শুদ্ধিপত্র দেখ। (a) $\{0, 6\}$ (b) $\{0, 1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ (c) W (d) W (e) P (f) $\{0, 6\}$ (g) $\{0, 2, 3, 4, 6, 9\}$ (h) $\{0, 3, 6\}$.

7. (a) বিচ্ছিন্ন নয় ; (b) বিচ্ছিন্ন নয় ; (c) বিচ্ছিন্ন ; (d) বিচ্ছিন্ন নয়। (e) বিচ্ছিন্ন। 8. $A \cap B$=ঐ বিদ্যালয়ের নবমশ্রেণী 'ক' বিভাগের সকল ছাত্রের বিন্যাস। $A \cup B$=ঐ বিদ্যালয়ের নবমশ্রেণীর সকল ছাত্র এবং সকল 'ক' বিভাগের সকল ছাত্রের বিন্যাস। $A-B$=ঐ বিদ্যালয়ের নবমশ্রেণীর ছাত্র নয় এইরূপ সকল 'ক' বিভাগের ছাত্রের বিন্যাস। $B-A$='ক' বিভাগের ছাত্র নয়, এইরূপ ঐ বিদ্যালয়ের নবমশ্রেণীর সকল ছাত্রের বিন্যাস।

10. চারবার ডিগবাজি খাইতে হয়. এইরূপ খেলা সার্কাসে দেখান হয় না।

11. (শুদ্ধিপত্র দেখ) উত্তর : এই অঙ্কগুলি সহজ নয়।

12. (*a*) সত্য ; (*b*) কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না ; (*c*) সত্য ; (*d*) কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না ; (*e*) সত্য।

13. কোন ব্যক্তিই সম্মানিত নন।

প্রশ্নমালা 5 [পৃষ্ঠা 55-56]

1. (i) $x'y+x'y'+xy$; (ii) $xy'z+xy'z'+xyz+x'yz+x'yz'$ (iii) $xyz+xy'z+xyz'+x'yz+x'yz'$ (iv) $xy'z't+x'y'zt+x'y'z't$ (v) $x'y'z'$ (vi) $xyz+xyz'+x'yz'$

2. (i) $(x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z')$

(ii) $(x+y+z)(x+y'+z')(x+y+z')(x'+y'+z)(x'+y'+z')$

(iii) 1. (iv) $(x+y+z)(x+y+z')(x'+y+z)$.

(v) $(x+y+z'+t)(x'+y+z+t)(x'+y'+z'+t)$

(vi) $(x+y+z)(x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z)(x'+y+z')$

(vii) $(x+y+z)(x'+y'+z)(x'+y'+z')(x'+y+z')$

4. (i) $x'yz+x'yz'+xy'z+x'y'z'+xyz+xyz'$

এবং $(x'+y+z)(x'+y+z')$

(ii) $x'yz+x'yz'+xy'z+xy'z'$

এবং $(x+y+z)(x+y+z')(x'+y'+z)(x'+y'+z')$

(iii) $x'yz+x'y'z+xyz'+xy'z'$

এবং $(x+y+z)(x+y'+z)(x'+y+z')(x+y'+z')$

5. $xyz+x'y'z'+x'yz+x'yz'+x'y'z+x'y'z'$

এবং $(x'+y'+z)(x'+y+z')$

6. (i) $xyz'+xy'z+xy'z'+x'yz+x'y'z+x'yz'$

(ii) $xyz+xy'z'+x'yz'+x'yz$

(iii) $(x+y')(x'+y')$; (iv) $(x'+y)$;

(v) $(x+y+z')(x+y'+z)(x+y'+z')(x'+y+z)(x'+y'+z')$

(vi) $(x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z)$

7. (i) $(x'+y)(x+y')$;

(ii) $(x+y+z')(x+y'+z')(x'+y+z')(x'+y'+z)$

(iii) $(x+y+z)(x+y'+z)(x+y+z')(x+y'+z')$
$=(x+y)(x+y')$

8. (i) $x'y'$ — (ii) $xyz+xyz'+xy'z+xy'z'$

9. f_1 : $xyz+xy'z+x'yz+x'y'z$
$=(x'+y'+z)(x'+y+z)(x+y'+z)(x+y+z)$

f_2 : $xyz+xyz'+x'yz+x'y'z$

$=(x'+y+z')(x'+y+z)(x+y'+z)(x+y+z)$

$f_3=xyzt+xyzt'+xy'zt+xy'z't'$
$+xy'z't+x'yz't+x'y'zt+x'y'z't'$
$=(x'+y'+z+t')(x'+y'+z'+t')(x'+y+z+t)(x+y'+z'+t')$
$(x+y'+z'+t)(x+y'+z+t)(x+y+z+t)(x+y+z+t')$

প্রশ্নমালা 6 [পৃষ্ঠা 62]

1. $a+b$; 2. 1 ; 3. 1 ; 4. b ; 5. 1 ; 6. $c'(ab+a'b')$; 8. $a'(bc'+d)$; 9. $a'b$; 10. $ab'+b'c+ca'$ 11. $a'b'$; 12. $ab'c'$; 13. $a'(c+bd)$; 14. abc ; 15. abc ; 16. $abcd$; 17. $ab+c(a'b+ab')$; 18. $a(b'+c')+b'cd$; 19. ab ; 20. $a+b$.

প্রশ্নমালা 7 [পৃষ্ঠা 69-70]

1. (a) বচন নয় ; (b) বচন ; (c) বচন নয় ; (d) বচন নয় ; (e) বচন নয় ; (f) বচন নয়।

2. (a) তানসেন সুগায়ক ছিলেন ; তানসেন রাজনীতি বুঝিতেন না।
(b) রবীন্দ্রনাথ একজন কবি ; রবীন্দ্রনাথ একজন দার্শনিক।
(c) আমি ফুটবল খেলা ভালবাসি ; আমি টেনিস খেলা ভালবাসি না।
(d) আমি আজ ফুটবল খেলা দেখিতে যাইব ; আমি আজ গান শুনিতে যাইব।
(e) রাম ইংরাজিতে প্রথম স্থান অধিকার করিয়াছে ; রাম গণিতে প্রথম স্থান অধিকার করিয়াছে।

3. (a) আজ বৃষ্টি পড়িবে না। (b) মোহনবাগান, ইষ্টবেঙ্গলের কাছে হারিবে ; (c) অলস ব্যক্তি জীবনে উন্নতি করিতে পারে।

4. (a) রাম মিত্রইন্‌ষ্টিট্যুসনের ছাত্র অথবা রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হয় নাই। (b) রাম মিত্রইন্‌ষ্টিট্যুসনের ছাত্র এবং রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হয় নাই। (c) রাম মিত্রইন্‌ষ্টিট্যুসনের ছাত্র এবং রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হইয়াছে। (d) রাম মিত্রইন্‌ষ্টিট্যুসনের ছাত্র নয় অথবা রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হইয়াছে। (e) রাম মিত্রইনষ্টিট্যুসনের ছাত্র নয় অথবা রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হয় নাই। (f) রাম মিত্রইন্‌ষ্টিট্যুসনের ছাত্র এবং রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হইয়াছে" অথবা রাম মিত্রইনষ্টিট্যুসনের ছাত্র নয় এবং রমেশ পরীক্ষায় কৃতকার্য হয় নাই।

5. (a) $p.q$; (b) p' ; (c) $p+q'$.

প্রশ্নমালা 8 [পৃষ্ঠা 74-75]

[p q ও r এর 'সত্যমান' উদাহরণগুলির ক্রমে লও]

1. (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) ; 2. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1) ; 3. (1, 1, 1, 1) ; 4. (0, 0, 0, 0) 5. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) 6. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) ; 7. (0, 1, 1, 0)

প্রশ্নমালা 9 [পৃষ্ঠা]

1 (a) রমেশ পরিশ্রমী নয় অথবা রাম বুদ্ধিমান নয়। (b) সোবার্স একজন ভাল ব্যাটস্‌ম্যান নয় অথবা বেদী একজন ভাল বোলার নয়। (c) শরৎচন্দ্র একজন সুসাহিত্যিক নন এবং তোমার সাহিত্য সম্বন্ধে জ্ঞান আছে।

2. $f=pq+(pq'+p'q)r+q'r'$; $g=(p+p'q')r$; $h=pq'r'$.

3. T F T T F.

4. (*i*) 0 ; (*ii*) 1 ; (*iii*) 1 ; (*iv*) 1 ; (*v*) 1 ; (*vi*) 9 ; (*vii*) 1

প্রশ্নমালা 10 [পৃষ্ঠা 84]

1. টটোলজি 2. কন্‌টিন্‌জেবেন্সি 3. কন্‌টিন্‌জেন্সি 4. কন্‌ট্র্যাডিক্সন্ 5. কন্‌টিন্‌জেন্সি 6. টটোলজি.

প্রশ্নমালা 11 [পৃষ্ঠা 88]

1. 1 ; 2. 0, 3. 0 ; 4. 1 ; 5. 1 ; 6. 1 ; 7. 1 ; 8. 1। ৯. 1. [10—13 প্রশ্নগুলিতে প্রদত্ত বচনগুলিকে $p\to q$ ধরা হইয়াছে]

10. $\boldsymbol{q\to p}$: যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোন সমান হয়, তবে সমান কোন দুইটির বিপরীত বাহুদ্বয় সমান। $\boldsymbol{p'\to q'}$: "যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান না হয়, তবে তাহাদের বিপরীত কোণদ্বয় সমান হইবে না।" $\boldsymbol{q'\to p'}$: "যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ সমান না হয়, তবে তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান হইবে না।"

11. $\boldsymbol{q\to p}$: যদি কোন সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র হয়, তবে উহার একটি কোণ সমকোণ।" $\boldsymbol{p'\to q}$: "যদি কোন সামান্তরিকের কোন কোণ সমকোণ না হয়, তবে সামান্তরিকটি আয়তক্ষেত্র নয়।" $\boldsymbol{q'\to p'}$: "যদি কোন সামান্তরিক আয়তক্ষেত্র না হয়, তবে সামান্তরিকটির কোন কোণ সমকোণ নয়।"

12. $\boldsymbol{q\to p}$: "যদি $a+c=b+c$ হয়, তবে $a=b$"
$\boldsymbol{p'\to q'}$: "যদি $a\neq b$ হয়, তবে $a+c\neq b+c$"
$\boldsymbol{q'\to p'}$: "যদি $a+c\neq b+c$ হয়, তবে $a\neq b$"

13. $\boldsymbol{q\to p}$: "যদি $ac\neq bc$ হয়, তবে $a\neq b$"
$\boldsymbol{p'\to q'}$: "যদি $a=b$ হয়, তবে $ac=bc$"
$\boldsymbol{q'\to p'}$: "যদি $ac=bc$ হয়, তবে $a=b$"

শুদ্ধিপত্র

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা 30—32)

প্রশ্ন 2 এ "M=পৃথিবীর সকল গণিতজ্ঞের বিন্যাস" প'ড়

প্রশ্ন 6 এ "R={0, 3, 6, 9}" প'ড়।

প্রশ্ন 11 এ নিম্নে অংশটুকু যোগ কর।

"(V) যে সকল অঙ্ক আমার মাথাব্যথার কারণ হয়, কেবল তাহাদের লইয়াই আমি হৈ চৈ করি।"